Федеральное государственное бюджетное научное учреждение
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук
(УФИЦ РАН)
Институт математики с вычислительным центром - обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук
(ИМВЦ УФИЦ РАН)

На правах рукописи

Шавлуков Азамат Мавлетович

ТИПИЧНЫЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ И НЕЛИНЕЙНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

01.06.01 – Математика и механика

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

НАУЧНЫЙ ДОКЛАД

Уфа – 2024

Работа выполнена в Институте математики с вычислительным центром - обособленном структурном подразделении Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук.

Научный руководитель: **Сулейманов Булат Ирекович,**
доктор физико-математических наук, с.н.с., ведущий научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

Рецензенты: **Кордюков Юрий Аркадьевич,**
доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

Валеев Нурмухамет Фуатович,
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела вычислительной математики Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Изучение сингулярностей решений систем уравнений газовой динамики и связанных с ними эффектов – одна из актуальных задач математической физики.

Активно развивавшаяся в XX веке усилиями в том числе Хасслера Уитни, Рене Тома, Кристофера Зимана, Джона Мазера, Бернара Морена, Владимира Игоревича Арнольда и многих других выдающихся специалистов математическая теория катастроф, понимаемая далее как теория особенностей дифференцируемых отображений вместе с приложениями, дала мощный аппарат для изучения поведения решений уравнений в окрестности точки градиентной катастрофы – такой конечной точки, в которой первые производные решения обращаются в бесконечность. Начиная с пионерских работ А. Х. Рахимова (представителя школы В. И. Арнольда) с 1990-х годов начало формироваться направление исследований особенностей решений квазилинейных систем, типичных в смысле математической теории катастроф.

В одномерной изоэнтропической газовой динамике (в моделях которой газ или жидкость не обмениваются теплотой с окружающей средой) и нелинейной геометрической оптике (НГО) для интегрирования уравнений широко применяется преобразование годографа, меняющее ролями зависимые и независимые переменные.

В этом преобразовании обращение в нуль якобиана в конечной точке означает обращение в бесконечность первых производных решений системы – происходит градиентная катастрофа. Значения же самих решений конечны. При этом теряет гладкость (здесь и далее, если не оговорено противное, гладкость – локальная бесконечная дифференцируемость) и взаимную однозначность отображение из плоскости годографа на плоскость скорости и плотности течения.

Эта ситуация может быть сформулирована как задача анализа критических точек локально гладкой функции, зависящей от скорости и плотности течения как от основных переменных, а от пространственной координаты и от времени как от параметров. Критические точки этой функции – суть решения системы, получаемой из исходной после применения преобразования годографа. Данная задача может быть плодотворно исследована с помощью результатов и методов теории особенностей.

В настоящей работе под описанием особенностей решения по существу подразумевается задание решений в терминах решений канонических уравнений теории катастроф, получаемых как критические точки локально гладких функций, зависящих дополнительно от параметров, называемых в теории катастроф *управляющими*. Фундаментальные результаты теории особенностей заключаются в том, что существует конечный список нормальных форм, к которым может быть приведена локально гладкая (аналитическая) функция невырожденными обратимыми гладкими (аналитическими) преобразованиями. Решения системы уравнений, получаемой из поиска критических точек функции в канонической форме локально задают решения исходной системы в окрестности точки градиентной катастрофы.

Целью исследования является задание решений уравнений газовой динамики и нелинейной геометрической оптики в окрестности точки градиентной катастрофы в терминах решений канонических уравнений теории катастроф.

Задачи исследования:

1. Описать омбилическую особенность решений системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики.

2. Показать совпадение с точностью до растяжений генотипов особенностей решений линейного одномерного однородного волнового уравнения в образе годографа (к которому сводится линеаризация системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики) и генотипов особенностей решений системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики. Показать аналогичное наследование для уравнения Лапласа и системы уравнений НГО.

3. Описать особенность типа сечения сборки решений системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Чаплыгина, нарушающем условие сильной нелинейности.

4. Описать омбилическую особенность решений системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Бехерта-Станюковича, нарушающем условие еще более сильное, чем условие сильной нелинейности.

5. Описать особенность типа сборки решений системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики и системы уравнений нелинейной геометрической оптики при стремлении плотности газа (падении интенсивности) к нулю.

6. Описать омбилическую особенность решений системы уравнений нелинейной геометрической оптики.

Научная новизна работы

В окрестности точки градиентной катастрофы описаны асимптотики решений уравнений идеальной одномерной газовой динамики и системы уравнений нелинейной геометрической оптики для локально бесконечно дифференцируемых (или, в случае системы уравнений нелинейной геометрической оптики, аналитических) функций давления (интенсивности) и при различных условиях обращения якобиана в нуль.

Строго обоснованы формальные результаты предыдущих работ, дополнены два результата предшественников: впервые описана особенность типа сборки для газа Чаплыгина (оставленного за рамками анализа в работе В. Р. Кудашева и Б. И. Сулейманова 2001 г.) и корректно описано возмущение генотипа особенности типа эллиптической омбилики решений системы уравнений нелинейной геометрической оптики.

Замечено наследование генотипов особенностей складки, сборки и сечения гиперболической омбилики решений системы уравнений одномерной газовой динамики от генотипов особенностей складки, сборки и сечения гиперболической омбилики решений линейного волнового уравнения в образе годографа. Замечено наследование генотипа особенности эллиптической омбилики решения системы уравнений нелинейной геометрической оптики от генотипов особенностей эллиптической омбилики решения уравнения Лапласа.

Практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Изучены решения квазилинейных систем уравнений первого порядка в окрестности точки, в которой первые производные решений обращаются в бесконечность. Представлен конструктивный метод проведения подобного исследования на основе методов теории особенностей с использованием преобразований в классе локально бесконечно дифференцируемых или аналитических функций.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. В окрестности одной из трех типичных точек градиентной катастрофы описаны решения системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в терминах решений канонических уравнений сечения гиперболической омбилики.

2. Показано, что с точностью до растяжений совпадают генотипы особенностей решений линейного одномерного однородного волнового уравнения (к которому сводится линеаризация системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики) и генотипы особенностей решений системы уравнений идеальной

одномерной газовой динамики – тем самым происходит наследование особенностей.

3. В окрестности одной из трех типичных точек градиентной катастрофы решение системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Чаплыгина (нарушающего условие сильной нелинейности) описано в терминах решений канонического уравнения сечения сборки. Дополнен результат Б. И. Сулейманова и В. Р. Кудашева 2001 г. Показано, что в отличие от более общего случая, происходит наследование не только генотипа, но и возмущения катастрофы.

4. В окрестности одной из трех типичных точек градиентной катастрофы описаны решения системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Бехерта-Станюковича (нарушающего условие более сильное, чем условие сильной нелинейности) в терминах решений канонических уравнений сечения гиперболической омбилики. Показано, что в этом случае тождественно равен нулю один из управляющих параметров катастрофы. В этом заключается специфика данного случая.

5. В окрестности одной из трех типичных точек градиентной катастрофы решение системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики (и решение системы уравнений нелинейной геометрической оптики) описано в терминах решений канонического уравнения сборки при стремлении плотности газа к нулю (падении интенсивности).

6. В окрестности одной из трех типичных точек градиентной катастрофы описаны решения системы системы уравнений нелинейной геометрической оптики в терминах решений канонических уравнений сечения эллиптической омбилики. Показано, что с точностью до растяжений совпадает генотип особенности решения уравнения Лапласа и генотип особенности решения системы системы уравнений нелинейной геометрической оптики – тем самым происходит наследование особенностей. Дополнительно исправлен (по части неравенства нулю одного из управляющих параметров) и выполнен не на формальном уровне, а на уровне сходящихся рядов Тейлора аналитических функций, результат Б. И. Дубровина , Т. Гравы, К. Клейна 2009 г.

Тем самым работа почти завершает исследование типичных (с точки зрения математической теории катастроф) особенностей решений одномерных однородных систем уравнений газовой динамики и нелинейной геометрической оптики. Во-первых, остается обоснование непустоты множества гладких решений при описании провальной особенности сборки для случая произвольного аналитического в окрестности нуля давления (интенсивности). Во-вторых, не решена проблема описания точки типичной градиентной катастрофы, происходящей при трансформации слабых разрывов решений гиперболического варианта системы в их сильные разрывы.

Достоверность полученных результатов обеспечена конструктивным доказательством теорем в соответствии с фундаментальными результатами теории уравнений с частными производными, теории особенностей дифференцируемых отображений со всеми необходимыми ссылками.

Апробация работы

Основные результаты научно – квалификационной работы докладывались и обсуждались на заседаниях общегородского семинара им. А.М. Ильина по дифференциальным уравнениям математической физики Института математики с вычислительным центром УФИЦ РАН (руководители: д.ф.-м.н., профессор Л.А. Калякин и д.ф.-м.н., профессор В.Ю. Новокшенов; г. Уфа, 2021, 2022).

Результаты были так же представлены в ходе выступлений на следующих конференциях: Всероссийская конференция школа с международным участием «Электронные, спиновые и квантовые процессы в молекулярных и кристаллических системах» (г. Уфа, 2019); Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023); Студенческая школа-конференция «Математическая весна» (г. Нижний Новгород, 2020, 2021); Всероссийская научная конференция МФТИ (г. Москва, 2021); Международная конференция «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (г. Уфа, 2020); Международная молодежная школа-конференция «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании» (г. Уфа, 2020); Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г. Москва, 2020, 2021, 2022, 2023); Конференция международных математических центров мирового уровня (г. Сочи, 2021); Школа для молодых механиков и математиков SYMM (г. Москва, 2021, 2022); Международный дистанционный воркшоп «Online workshop on PDEs in many body systems» (г. Прага, 2021); Международная конференция «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения» (оз. Банное, 2021, 2022); Международная конференция «Nonlinear Dynamics and Integrability» (г. Ярославль, 2022); Международная конференция «O.A. Ladyzhenskaya centennial conference on PDEs» (г. Санкт-Петербург, 2022).

Публикации

По результатам проведенных исследований опубликованы 4 работы в изданиях из перечня ВАК РФ, индексируемых в Web of Science и Scopus и входящих в РИНЦ и 20 тезисов в сборниках по материалам докладов на конференциях.

Глава 3 основана на готовящейся к печати прошедшей рецензирование и корректуру статье в издании из перечня ВАК РФ, индексируемого в Web of Science и Scopus и входящего в РИНЦ.

Личный вклад автора

Выносимые на защиту положения получены автором самостоятельно. Задача 5 поставлена научным руководителем Б. И. Сулеймановым. Задачи 1, 2, 6 были поставлены в ходе обсуждения с научным руководителем. Задачи 3 и 4 поставлены автором перед собой самостоятельно. Анализ полученных результатов, написание, корректура, оформление совместных статей осуществлялись совместно с научным руководителем.

В совместных работах [1], [2], [3] автором проведены ключевые для описания особенностей выкладки и рассуждения.

Вклад соавторов в совместные работы следующий.

В работе [1] научным руководителем Б. И. Сулеймановым отмечен «эталонный» характер одного из найденных автором частных решений. В работе [2] научным руководителем доказана лемма о гладкости решений линейного уравнения, получаемого из исходной системы после применения преобразования годографа и невырожденных замен. В работе [3] научным руководителем указана применимость теоремы как для гиперболического, так и для эллиптического варианта уравнений, а соавтором С. Н. Мелиховым в **Теореме 2** доказана необходимость. В готовящейся к публикации работе об особенности типа эллиптической омбилики научным руководителем со ссылкой на Э. Пикара обоснована аналитичность решений линейного уравнения, получаемого из образа годографа исходной системы после невырожденных преобразований.

Объем и структура работы

Научно – квалификационная работа объемом 84 страницы состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы из 70 наименований. Работа содержит 2 рисунка.

Благодарности

Автор выражает глубокую признательность и благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. Сулейманову Булату Ирековичу за постановку задач,

содержательные комментарии и советы, постоянное внимание и поддержку при подготовке диссертации.

Так же выражаются благодарности Д. В. Туницкому за указание на теорему об ограниченности решений слабо-нелинейных одномерных квазилинейных систем при ограниченности начальных данных, И. А. Богаевскому, И. Х. Мусину и Д. В. Седых за полезные ссылки.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность темы работы, сформулированы цель и задачи исследования, приведены результаты работы с обоснованием их достоверности, указанием их научной новизны и практической значимости.

В первой главе описаны типичные (с точки зрения теории катастроф) особенности решений квазилинейной системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где t – время, $x \in \mathbb{R}$ – пространственная координата, $u(t,x)$ – скорость потока, $\rho(t,x) > 0$ – плотность газа (или толщина слоя жидкости),

$$\alpha(\rho) = \frac{p(\rho)'}{\rho} > 0$$

есть локально бесконечно дифференцируемая функция, где $p(\rho)$ – давление. В этом и следующем подпунктах без ограничения общности (в силу возможности применить растяжение) считается, что $\alpha(\rho_*) = \alpha_* = 4$ и что функция раскладывается в ряд Тейлора

$$\alpha(\rho) = 4 + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\alpha_j}{j!}\Delta\rho^j \quad (\Delta\rho = \rho - \rho_*).$$

Здесь $\rho_* > 0$ – точка градиентной катастрофы, в которой первые производные решений (1) обращаются в бесконечность. Так же в этом пункте считается, что

$$\alpha_1 \neq -\frac{3\alpha_*}{\rho_*} = -\frac{12}{\rho_*}.$$

Это условие нарушается для газа Чаплыгина, который исследуется отдельно.

Выбор значения $\alpha(\rho_*) = \alpha_* = 4$ мотивирован удобством перехода к (1) от нелинейного уравнения Шрёдингера

$$-i\varepsilon\Psi_t = \varepsilon^2\Psi_{xx} + K(|\Psi|^2)\Psi \qquad (\alpha(\rho) = -2K'(\rho), \qquad 0 < \varepsilon << 1)$$

в бездисперсионном пределе.

Посредством инвариантов Римана (где $r \neq l$, иначе $\rho = 0$)

$$r = u + \int_{\tilde{s}}^{\rho} \frac{c(s)}{s}\mathrm{d}s,$$
$$l = u - \int_{\tilde{s}}^{\rho} \frac{c(s)}{s}\mathrm{d}s, \quad c^2 = p_\rho = \rho\alpha(\rho),$$

где $c(\rho) > 0$ – скорость звука, система (1) представляется как диагональная

$$\begin{cases} r_t + (\frac{r+l}{2} + c)r_x = 0, \\ l_t + (\frac{r+l}{2} - c)l_x = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Широко применяемое в газовой динамике преобразование годографа и следующие из него соотношения

$$\begin{gathered} r_x = Jt_l, \quad r_t = -Jx_l, \\ l_x = -Jt_r, \quad l_t = Jx_r, \\ J = r_x l_t - r_t l_x, \quad j = x_r t_l - x_l t_r, \quad J = j^{-1}, \end{gathered} \tag{3}$$

меняют ролями зависимые и независимые переменные системы (1) и переводят квазилинейную систему (2) в линейную

$$\begin{cases} x_l = t_l(\frac{r+l}{2} + c), \\ x_r = t_r(\frac{r+l}{2} - c), \end{cases}$$

а невырожденные замены

$$\begin{gathered} t = B_u, \\ x = uB_u - B - \rho B_\rho \end{gathered} \tag{4}$$

сводят систему (2) к единственному линейному гиперболическому уравнению

$$8\alpha B_{rl} = \left(\alpha_\rho + 3\frac{\alpha}{\rho}\right)\sqrt{\frac{\rho}{\alpha}}(B_r - B_l), \tag{5}$$

а систему (1) к единственному линейному гиперболическому (при $\rho > 0$) уравнению

$$\rho B_{\rho\rho} + 2B_\rho = \alpha(\rho) B_{uu}. \tag{6}$$

Всякий формальный степенной ряд решения

$$B = \sum_{i+j \geq 0} b_{ij} \Delta r^i \Delta l^j.$$

представляет собой ряд Тейлора в окрестности $r = r_*$, $l = l_*$ истинного решения согласно **Лемме** из пункта 1.1. научно-квалификационной работы. Для провальных особенностей (под провалом подразумевается стремление к нулю плотности газа или падение интенсивности) и эллиптического аналога системы (1) обоснована аналитичность решений и сходимость рядов.

Якобиан преобразования (3) принимает вид

$$j = -2ct_r t_l. \tag{7}$$

Отображение $(u(r,l), \rho(r,l)) \to (t,x)$ перестает быть взаимно однозначным и гладким (понимаемую здесь и далее как бесконечную дифференцируемость, если не оговорено противное). В окрестности указанной точки после использования обратимых невырожденных гладких замен решения (1) локально описываются в терминах канонических уравнений теории катастроф.

В терминах коэффициентов b_{ij} обращение якобиана (7) в нуль в точке (r_*, l_*) записывается как

$$j(r_*, l_*) = (B_{rr}(r_*, l_*) + B_{lr}(r_*, l_*))(B_{rl}(r_*, l_*) + B_{lr}(r_*, l_*)) =$$
$$= -4\sqrt{\rho_*}(2b_{20} + b_{11})(b_{11} + 2b_{02}) = 0.$$

Существуют три возможности обращения якобиана в нуль: $b_{11} = -2b_{20}$, $b_{11} = -2b_{02}$ и одновременно $b_{11} = -2b_{20} = -2b_{02}$.

Выбор одного подходящего значения r_* или l_* реализует первую или вторую возможности (исследуемые одинаково), выбор сразу двух подходящих значений r_* и l_* отвечает третьей возможности. Любые дополнительные, ниоткуда не следующие, ограничения в виде равенств мы не будем относить к ситуации «общего положения». В настоящем подпункте выбором r_* и l_* мы требуем выполнения двойного равенства

$$b_{11} = -2b_{20} = -2b_{02}. \tag{8}$$

С учетом этого представление всех слагаемых уравнения (5) в виде степенных рядов с последующим приравниванием членов при линейно независимых членах, определяет рекуррентную последовательность соотношений на коэффициенты b_{ij}.

Рассмотрим теперь локально гладкую «единую» (в том смысле, что она включает в себя все изучаемые переменные) потенциальную функцию

$$F(\rho, u; t, x) = \rho(ut - B(\rho, u) - x) \tag{9}$$

основных переменных ρ, u и двух дополнительных параметров t, x, которая определяется локально гладкими решениями дифференциального уравнения (6).

При $\rho \neq 0$ соотношения (4) равносильны равенству нулю производных $F'_\rho(\rho, u; t, x)$ и $F'_u(\rho, u; t, x)$ функции (9):

$$\begin{gathered} F_u \equiv t - B_u = 0, \\ F_\rho \equiv ut - B - x - \rho B_\rho = 0. \end{gathered}$$

Таким образом критические точки (9) суть решения образа годографа системы (1).

Обращение в нуль якобиана отображений $(\rho, u) \to (t, x)$, которые формулами (4) определяются через локально гладкие решения дифференциального уравнения (6), равносильно вырожденности критических точек функции (9). Подобные же особенности гладких функций $F(\rho, u; t, x)$, которые помимо двух основных переменных ρ и u зависят еще от двух параметров t, x, как раз и могут быть описаны с помощью идеологии и методики теории катастроф. Иными словами, изучая критические точки (9), мы изучаем поведение решений (1) в окрестности точки градиентной катастрофы.

В окрестности точки ГК она раскладывается в ряд Тейлора

$$\begin{gathered} F = 2\rho_*^{3/2}(b_{10} - b_{01}) + \rho_* z + \frac{\rho_* \Delta t}{2}(\Delta r + \Delta l) + \frac{\sqrt{\rho_*}}{4} z(\Delta r - \Delta l) + \\ + \frac{\sqrt{\rho_*}}{8}\Delta t(\Delta r^2 - \Delta l^2) + z(\Delta r - \Delta l)^2 + \\ + \frac{4 - \alpha_1 \rho_*}{512}\Delta t(\Delta r - \Delta l)^2 \frac{\Delta r + \Delta l}{2} + h_3 z(\Delta r - \Delta l)^3 + \\ + A_+ \Delta r^3 + A_- \Delta l^3 + \\ + \sum_{i+j \geq 4} (f_{ij}^0 + f_{ij}^1 \Delta t + f_{ij}^2 z)\Delta r^i \Delta l^j, \end{gathered} \tag{10}$$

где, вообще говоря, A_+ и A_- не равны нулю.

Заметим, что

$$F(r,l;t_*,x_*) = 2\rho_*^{3/2}(b_{10}-b_{01}) + A_+\Delta r^3 + A_-\Delta l^3 + \sum_{i+j\geq 4} f_{ij}^0 \Delta r^i \Delta l^j.$$

Вид разложения Тейлора (10) позволяет сделать вывод о том, что функция $F(r,l;t,x)$ является так называемой 2 – деформацией функции $F(r,l;t_*,x_*)$. Данная 2 – деформация может быть индуцирована из так называемой $R-$версальной деформации (являющейся также и универсальной), описываемой трехпараметрическим семейством функций

$$G_{k_1,k_2,k_3}(y_1,y_2) = \frac{y_1^3+y_2^3}{3} - k_3y_1y_2 - k_2y_1 - k_1y_2. \tag{11}$$

Это по существу означает, что в достаточно малой окрестности точки $r=r_*$, $l=l_*$, $t=t_*$, $x=x_*$ функция $F(r,l;t,x)$, которая является в этой точке гладкой и обладает в ней разложением Тейлора (10), представима в виде

$$F(r,l;t,x) = \frac{y_1^3+y_2^3}{3} - k_3y_1y_2 - k_2y_1 - k_1y_2 + \gamma, \tag{12}$$

где $k_j = k_j(t,x)$ $(j=1,2,3)$ и $\gamma=\gamma(t,x)$ – гладкие в окрестности точки $t=t_*$, $x=x_*$ функции; $y_1=y_1(r,l,t,x)$, $y_2=y_2(r,l,t,x)$ – зависящая от параметров t и x гладкая локальная замена координат в R^2: $(r,l,t,x)\to(y_1(r,l,t,x),y_2(r,l,t,x))$, которая при фиксированных t и x является локальным диффеоморфизмом. Все коэффициенты тейлоровских разложений функций k_j, y_1, y_2 в окрестности точки ГК определяются однозначно, что позволяет построить преобразование и представить функцию $F(r,l;t,x)$ в форме (12), критические точки которой задают решения исходной системы (1).

Метод анализа типичных с точки зрения теории катастроф сингулярностей, описанный ранее на примере системы уравнений газовой динамики (1) применяется к решениям линейного волнового уравнения

$$u_{tt} = u_{xx}, \tag{13}$$

представимое в виде системы двух уравнений первого порядка

$$\begin{cases} u_t = v_x, \\ v_t = u_x, \end{cases} \tag{14}$$

которая из линеаризованной системы газовой динамики

$$\begin{cases} U_x + \alpha(\rho_*)V_x = 0, \\ V_t + \rho_* U_x + u_* V_x = 0 \end{cases} \tag{15}$$

возникает после применения преобразования Галилея $x \to x' = x - u_* t$ с последующим растяжением новой независимой пространственной переменной $x' = \sqrt{\alpha(\rho_*)\rho_*}x$ и переобозначения $U = u$, $V = -\sqrt{\rho_*/\alpha(\rho_*)}v$.

Преобразование годографа уравнения (14) переводит в систему

$$\begin{cases} t_v = x_u, \\ t_u = x_v, \end{cases} \tag{16}$$

из вида которой следует, что якобиан j преобразования годографа имеет вид

$$j = (t_v)^2 - (t_u)^2. \tag{17}$$

Аналогичные (4) подстановки

$$\begin{aligned} t &= B_u, \\ x &= B_v \end{aligned} \tag{18}$$

позволяют выразить решения системы (16) через общее решение

$$B = f(u+v) + g(u-v) \tag{19}$$

(рассматривается лишь бесконечно дифференцируемое решение) волнового уравнения

$$B_{uu} = B_{vv}.$$

Рассмотрим аналог функции (9) – функцию

$$\Psi(u, v; t, x) = ut + vx - B(u, v) \tag{20}$$

основных переменных u, v и управляющих параметров t, x, определяемую такими гладкими решениями (19) волнового уравнения (20). Соотношения (18) в точности равносильны системе двух уравнений $\Psi_u = 0$, $\Psi_v = 0$ на критические точки данной функции. В силу формул (17) – (19) обращение в нуль якобиана преобразования годографа, соответствующее вырожденности данных критических точек, в точке (u_*, v_*) равносильно равенству

$$f_2 g_2 = 0.$$

На t, x – плоскости точке (u_*, v_*) соответствует точка $t_* = f_1 + g_1, x_* = f_1 - g_1$. С учетом этого обстоятельства разложение Тейлора функции (20) в точке $(u_*, v_*; t_*, x_*)$ имеет вид

$$\Psi = (f_1 + g_1)u_* + (f_1 - g_1)v_* - (f_0 + g_0) + u_*\Delta t + v_*\Delta x +$$
$$\frac{(\Delta t + \Delta x)}{2}\widetilde{u} + \frac{(\Delta t - \Delta x)}{2}\widetilde{v} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{f_i}{i!}(\widetilde{u})^i - \sum_{j=2}^{\infty} \frac{g_j}{j!}(\widetilde{v})^j,$$

где $\widetilde{u} = (\Delta u + \Delta v)$, $\widetilde{v} = (\Delta u - \Delta v)$. Критические точки данной функции находятся из уравнений

$$\Psi_{\widetilde{u}} \equiv \frac{(\Delta t + \Delta x)}{2} + h_1(u) = 0,$$
$$\Psi_{\widetilde{v}} \equiv \frac{(\Delta t - \Delta x)}{2} + h_2(\widetilde{v}) = 0,$$

определяемых гладкими при малых значениях переменных $\widetilde{u}$ и $\widetilde{v}$ функциями $h_1(\widetilde{u})$ и, соответственно, $h_2(\widetilde{v})$, которые представляются асимптотическими разложениями в ряды Тейлора

$$h_1(\widetilde{u}) = -f_2\widetilde{u} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f_{i+1}}{i!}(\widetilde{u})^i \quad (\widetilde{u} \to 0),$$

$$h_2(\widetilde{v}) = -g_2\widetilde{v} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_{i+1}}{i!}(\widetilde{v})^i \quad (\widetilde{v} \to 0).$$

Генотипы катастроф функций (20) имеют, после применения диффеоморфных преобразований, соответственно, следующий вид:

при $g_2 \neq 0$, $f_2 = 0$, $f_3 \neq 0$

$$-f_3\frac{(\widetilde{u})^3}{6};$$

при $g_2 \neq 0$, $f_2 = f_3 = 0$, $f_4 \neq 0$

$$-f_4\frac{(\widetilde{u})^4}{4!};$$

при $f_2 = g_2 = 0$, $f_3 \neq 0$, $g_3 \neq 0$

$$-f_3\frac{(\widetilde{u})^3}{6} - g_3\frac{(\widetilde{v})^3}{6}.$$

Простыми растяжениями эти генотипы сводятся к генотипам катастроф функций (9), которым соответствуют все три универсальные особенности решений системы (1). Тем самым происходит наследование особенностей.

Применение уже описанных методов и результатов теории особенностей о версальных деформациях позволяет сделать следующие выводы.

Решения системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Чаплыгина ($m > 0$ – константа)

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \frac{m^2}{\rho^3}\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0. \end{cases}$$

в окрестности одной из трех типичных точек градиентной катастрофы заданы в терминах решений канонического уравнения сечения сборки

$$S(u, \rho; t, x)^3 + P(t, x) = 0.$$

Этим дополнен результат В. Р. Кудашева и Б. И. Сулейманова, где газ Чаплыгина не рассматривался. Отметим, что в отличие от более общего случая, происходит наследование не только генотипа, но и возмущения катастрофы.

Решения системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Бехерта-Станюковича

$$\begin{cases} u_t + uu_x + a^2\rho\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0, \end{cases}$$

в окрестности одной из трех типичных точек градиентной катастрофы заданы в терминах канонических уравнений катастрофы типа сечения гиперболической омбилики, получаемых из критических точек функции

$$F(r, l; t, x) = \frac{y_1^3 + y_2^3}{3} - k_2y_1 - k_1y_2 + \gamma,$$

отличающейся от (12) тем, что управляющий параметр $k_3 \equiv 0$.

Во второй главе решения системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики (1) и решения системы НГО

$$\begin{cases} u_t + uu_x - \alpha(\rho)\rho_x = 0, \\ \rho_t + (\rho u)_x = 0 \end{cases}$$

при стремлении $\rho \to 0$ в окрестности одной из трех типичных точек градиентной катастрофы заданы в терминах решений канонического уравнения сборки

$$\delta(t,x) + \sigma(t)S(u,\rho) + \frac{5}{12}b_{11}S(u,\rho;t,x)^3 = 0$$

Для частного случая уравнений мелкой воды ($\alpha(\rho \equiv 4)$) доказана аналитичность применяемых преобразований.

В третьей главе посредством аналитических преобразований решения системы уравнений НГО в окрестности точки градиентной катастрофы заданы в терминах канонических уравнений сечения эллиптической омбилики, получаемых из критических точек функции

$$\tilde{F}(u,\rho;t,x) \equiv y_1^2 y_2 - \frac{y_2^3}{3} - k_3 y_2^2 - k_2 y_1 - k_1 y_2 + \gamma,$$

где, что доказано отдельно, управляющий параметр $k_3 \not\equiv 0$. Это исправляет результат Б. И. Дубровина, Т. Гравы, К. Клейна, выполненный на формальном уровне и с учетом лишь начальных отрезков рядов Тейлора. Показано, что с точностью до растяжений совпадает генотип особенности решения уравнения Лапласа и генотип особенности решения системы системы уравнений нелинейной геометрической оптики – тем самым происходит наследование особенностей.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы заключаются в следующем:

1. Решения системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в окрестности одной из трех типичных точек градиентной катастрофы заданы в терминах критических точек функции канонической катастрофы типа сечения гиперболической омбилики.

2. Показано наследование особенностей газодинамической системы от волнового уравнения в образе годографа (к которому сводится линеаризация системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики): с точностью до растяжений совпадают генотипы их особенностей.

3. Решения системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Чаплыгина в окрестности одной из трех типичных точек градиентной катастрофы заданы в терминах канонического уравнения сечения сборки. Дополнен результат 2001 г. В. Р. Кудашева и Б. И. Сулейманова, которые оставили газ Чаплыгина за рамками анализа. Отмечено, что в отличие от более общего случая, происходит наследование не только генотипа, но и возмущения катастрофы.

4. Решения системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики в случае Бехерта-Станюковича в окрестности одной из трех типичных точек градиентной катастрофы заданы в терминах канонических уравнений катастрофы типа сечения гиперболической омбилики. Отмечено тождественное равенство нулю одного из управляющего параметров, чего не происходит в более общем случае.

5. Решения системы уравнений идеальной одномерной газовой динамики и системы НГО при стремлении плотности газа к нулю в окрестности одной из трех типичных точек градиентной катастрофы заданы в терминах канонического уравнения сборки.

6. В терминах канонических уравнений типа сечения эллиптической омбилики в окрестности одной из трех типичных точек градиентной катастрофы заданы решения системы уравнений НГО. Исправлен и выполнен не на формальном уровне, а на уровне сходящихся рядов Тейлора аналитических функций, результат работы Б. И. Дубровина, Т. Гравы К. Клейна 2009 г.

ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ НАУЧНО – КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ:

[1] Сулейманов, Б. И. Типичная провальная особенность сборки решений уравнений движения одномерного изоэнтропического газа / Б. И. Сулейманов, **А. М. Шавлуков** // Известия РАН. Серия физическая. – 2020. – Т. 84, No.5 – С. 664–666. (**Scopus**, РИНЦ)

[2] Сулейманов, Б. И. О наследовании решениями уравнений движения изоэнтропического газа типичных особенностей решений линейного волнового

уравнения / Б. И. Сулейманов, **А. М. Шавлуков** // Математические заметки. – 2022. – Т. 112, No.4 – С. 625–640. (**WoS, Scopus**, РИНЦ)

[3] Мелихов, С. Н. Типичные провальные асимптотики квазиклассических приближений к решениям нелинейного уравнения Шрёдингера / С. Н. Мелихов, Б. И. Сулейманов, **А. М. Шавлуков** // Дифференциальные уравнения . – 2024. – Т. 60, No.5 – С. 618–631. (**WoS, Scopus**, РИНЦ)

[4] Shavlukov, A. M. On Generic Singularities of Solutions to the 1D Gas Flow Equations: Chaplygin and Bechert–Stanyukovich Cases / A. M. Shavlukov // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2024. – V. 45, No.6 – P. 2793–2805. (**WoS, Scopus**, РИНЦ)