

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение  
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук  
(УФИЦ РАН)

Институт математики с вычислительным центром - обособленное структурное  
подразделение Федерального государственного бюджетного научного  
учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской  
академии наук (ИМ с ВЦ УФИЦ РАН)

*На правах рукописи*

**Астафьева Полина Юрьевна**

**СУБРЕЗОНАНСНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ОСЦИЛЛЯТОРОВ**

01.06.01 – Математика и механика

1.1.2 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**НАУЧНЫЙ ДОКЛАД**

Уфа – 2024

Работа выполнена в Институте математики с вычислительным центром - обособленном структурном подразделении Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

**Научный руководитель:**

**Киселев Олег Михайлович,**

доктор физико-математических наук, профессор, Автономная некоммерческая организация высшего образования "Университет Иннополис"

**Рецензенты:**

**Сулейманов Булат Ирекович**

доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник отдела «Дифференциальные уравнения» Института математики с вычислительным центром – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

**Глебов Сергей Геннадьевич**

кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры «Информационные технологии и прикладная математика» Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Уфимский государственный нефтяной технический университет»

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### **Актуальность темы**

Осцилляторы – одна из стандартных и наиболее широко изученных математических моделей современной математической физики. Резонансные явления в линейных осцилляторах хорошо известны и изучены. Ведутся исследования по авторезонансным явлениям в нелинейных осцилляторах и системах, связанных осцилляторами. В настоящее время вопросы резонансных взаимодействий и синхронизации осцилляторов играют важную роль в теории распространения сигналов и шифровании. Вместе с тем, возможности субрезонансных явлений в системах осцилляторов изучены существенно слабее, так как основаны на более сложных математических моделях, связанных с почти-периодическими функциями. Возможности построения систем связи и шифрования, основанных на субрезонансных явлениях, представляются значительными благодаря большей полосе частот и вариабельности скоростей подстройки по сравнению с системами, основанными на резонансных явлениях.

**Целью диссертационной работы** является изучение возникновения субрезонансных осцилляций в линейных осцилляторах.

### **Задачи исследования:**

Получить асимптотические формулы для амплитудно-частотных характеристик в случае субрезонансов различной природы – вынужденных и параметрических.

Получить формулы связи между асимптотическим ростом амплитуд колебаний и параметрами субрезонансных возмущений осцилляторов, как с внешней силой, так и при субрезонансных параметрических возмущениях линейных осцилляторов.

### **Научная новизна работы**

Получена формула асимптотического поведения роста амплитуды колебаний линейного уравнения второго порядка с почти-периодической внешней силой. Получена формула определяющая амплитуду субрезонансного решения в случае параметрического возмущения.

### **Практическая значимость**

Исследование субрезонансных явлений в осцилляторах представляется новой темой, как в задачах для линейных, так и в задачах для нелинейных динамических систем. Эти исследования являются обобщением и переходом на следующий по технической сложности уровень по сравнению с известными задачами о резонансных явлениях. В широком смысле, это обобщение задач о синхронизации на близкие к резонансным почти-периодические функции.

Область применения полученных результатов, в первую очередь— прикладная математика при построении математических моделей технических систем, в которых как резонансы, так и субрезонансы приводят к повышенному износу, например, зубчатых передач в высоконагруженных редукторах. А также в

теории связи и шифрования сигналов за счет использования субрезонансной подстройки частоты и амплитуды при передаче.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. Получена формула асимптотического поведения роста амплитуды колебаний линейного уравнения второго порядка с почти-периодической внешней силой. Получена система уравнений, определяющая амплитуду субрезонансного решения в случае параметрического возмущения.

2. Исследовано, что в случае воздействия на осциллятор почти-периодической силы, появляются колебания, близкие к резонансным, которые проявляются с возрастающей амплитудой. Амплитуда таких колебаний растет медленнее, чем в резонансном случае.

3. Получена система уравнений для параметрического субрезонансного роста амплитуды колебаний.

4. Проведено сравнение между асимптотическим приближением для времени перехода и численным методом, а также определена относительная разница между точкой поворота, полученной асимптотическим методом, и точкой поворота, полученной численным методом.

### **Достоверность полученных результатов**

Результаты, полученные аналитическим и численными методами близки.

## **Апробация работы**

Основные результаты научно-квалификационной работы докладывались и обсуждались на Второй международной конференции "Nonlinearity, Information and Robotics" (Иннополис, 2021); Научном семинаре в математическом институте им В.А. Стеклова (Москва, 2021); Международной научно-практической конференции "Роль математики в становлении специалиста-2022" (Уфа, 2022); Третьей международной конференции «Nonlinearity, Information and Robotics» (Иннополис, 2022); Международной научной конференции "Уфимская осенняя математическая школа-2022 (Уфа, 2022), Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (Суздаль, 2024).

## **Публикации**

По результатам проведенных исследований опубликованы 2 работы в изданиях, индексируемых в Web of Science / Scopus, 3 тезиса по материалам докладов на конференции.

**Личный вклад автора** Результаты вынесенные на защиту ВКР получены автором лично. Соавтору статей принадлежит постановка задач и выбор методов исследования.

## **Благодарности**

Автор выражает глубокую признательность и благодарность своему научному руководителю д.ф.-м.н. Киселеву Олегу Михайловичу за постановку задач, полезные советы, постоянное

внимание и поддержку при подготовке дипломной работы.

### **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

Во введении показана актуальность темы диссертации, сформулированы цель и задачи исследования, приведены результаты работы с обоснованием их достоверности, указанием их научной новизны и практической значимости.

В первой главе приведен обзор работ, посвященных исследованию поведению параметрическому резонансу, малым знаменателям и почти-периодическим функциям.

Во второй главе рассмотрено асимптотическое поведение линейного генератора при воздействии внешней почти-периодической силы. Показано, что при воздействии на осциллятор почти-периодической силы, появляются колебания, близкие к резонансным, которые проявляются с возрастающей амплитудой. Амплитуда таких колебаний растет медленнее, чем в резонансном случае. Получена формула для асимптотического поведения этого роста и свойств внешней силы.

В третьей главе для уравнения уравнения второго порядка, была получена система уравнений для параметрического субрезонансного роста амплитуды колебаний. Исследован рост амплитуды колебаний, найден момент перехода от увеличения амплитуды к ограниченным колебаниям в медленной переменной. Показана близость асимптотического и численного подходов.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в ходе исследований.

Было исследовано линейное дифференциальное уравнение второго порядка. Рассмотрено асимптотическое поведение линейного генератора при воздействии внешней почти-периодической силы. Решение задачи Коши с нулевыми начальными условиями можно было представить в виде рядов по  $\sin(t)$  и  $\cos(t)$ , которые определяют амплитуды колебаний.

При исследовании на сходимость рядов (2) встречались малые знаменатели. Поэтому для оценки рядов мы выполнили тригонометрические преобразования, разложив функцию синуса в ряд Маклорена, мы изменили порядок суммирования в ряде и, воспользовавшись свойством ограниченности Дзета-функции Римана, смогли мажорировать ряд, содержащий малые знаменатели, ограниченным рядом. Представление ряда в виде суммы с осциллирующей и знакоопределенной частью (4) позволило записать мажоранту и миноранту для данного ряда и, оказалось, что больший интеграл сходится и имеет порядок последнего члена (6). Таким образом, была найдена асимптотика для ряда  $\sigma_S$ . С помощью аналогичных преобразований, была найдена асимптотика для ряда  $\sigma_c$  (7). Получена формула для асимптотического поведения этого роста и свойств внешней силы (9).

Рассмотрено линейное уравнение второго порядка:

$$u'' + u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \cos\left(\left(1 - \frac{1}{n^p}\right)t\right),$$

и найдено решение для задачи Коши с нулевыми начальными условиями:

$$\begin{cases} u|_{t=0} = 0 \\ u'|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Данный вид уравнения представляет интерес, так как амплитуда колебаний стремится к нулю ( $\frac{1}{n^k}$ ), частота  $(1 - \frac{1}{n^p})t$  стремится к резонансной частоте, и это типичный случай, когда появляются субрезонансные решения.

Решение было найдено в виде:

$$\begin{aligned}
u = & \frac{1}{2} \sin(t) \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{n^p \sin(\frac{t}{n^p} - 2t)}{2n^{p+k} - n^k} + \frac{2n^{2p} \sin(\frac{t}{n^p})}{2n^{p+k} - n^k} - \right. \\
& - \left. \frac{n^p \sin(\frac{t}{n^p})}{2n^{p+k} - n^k} \right) + \frac{1}{2} \cos(t) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^p \cos(\frac{t}{n^p} - 2t)}{2n^{p+k} - n^k} + \right. \\
& + \left. \frac{2n^{2p} (\cos(\frac{t}{n^p}) - 1)}{2n^{p+k} - n^k} - \frac{n^p \cos(\frac{t}{n^p})}{2n^{p+k} - n^k} \right). \quad (1)
\end{aligned}$$

Амплитуду колебаний определяют коэффициенты при  $\sin(t)$  и  $\cos(t)$ . Здесь определяются равномерно ограниченные функции по  $t$  из правой части формулы. Первое и третье слагаемое рядов при  $\sin(t)$  и  $\cos(t)$  обозначаются соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned}
R_1(t) &= \frac{1}{2} \sin(t) \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{n^p \sin(\frac{t}{n^p} - 2t)}{2n^{p+k} - n^k} - \frac{n^p \sin(\frac{t}{n^p})}{2n^{p+k} - n^k} \right); \\
R_2(t) &= \frac{1}{2} \cos(t) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^p \cos(\frac{t}{n^p} - 2t)}{2n^{p+k} - n^k} - \frac{n^p \cos(\frac{t}{n^p})}{2n^{p+k} - n^k} \right).
\end{aligned}$$

Используя интегральный критерий сходимости, мы можем показать, что ряды  $R_1(t)$  и  $R_2(t)$  равномерно ограничены по  $t$  для  $k > 1$ .

Исследовали поведение по  $k$   $t$  двух рядов:

$$R_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{2p} \sin(\frac{t}{n^p})}{2n^{p+k} - n^k}, \quad R_4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{2p} (\cos(\frac{t}{2n^p}) - 1)}{2n^{p+k} - n^k}. \quad (2)$$

$$R_4 = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^{2p} \sin^2\left(\frac{t}{2n^p}\right)}{2n^{p+k} - n^k}. \quad (3)$$

$$\begin{aligned} R_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-k} \sin\left(\frac{t}{n^p}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n^p}\right)^m = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-k} \sin\left(\frac{t}{n^p}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-k} \sin\left(\frac{t}{n^p}\right) \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n^p}\right)^m. \end{aligned}$$

Ряды в правой части неравенства сходятся. Аналогично оценили ряд  $R_4$ .

Также исследовали поведение рядов:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-k} \sin\left(\frac{t}{n^p}\right), \\ \sigma_c &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-k} \sin^2\left(\frac{t}{2n^p}\right). \end{aligned}$$

Для того чтобы показать, что ряд  $\sigma_s$  абсолютно сходится при любом значении  $t$ , разложили функцию синуса в ряд Маклорена, изменили порядок суммирования:

$$\sigma_s = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1} \frac{t^{2j-1}}{(2j-1)!} \zeta(2jp+k)$$

Функция  $\zeta(2jp+k)$  равномерно ограничена по  $j \in \mathbb{N}$ , для  $p > 0$ ,  $k > 1$ . Тогда  $\sigma_s$  может быть мажорирована рядами:

$$|\sigma_s| \leq C \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{2j-1}}{(2j-1)!},$$

где  $C > \zeta(k)$ . Ряды в правой части сходятся при любых  $t$ . При возрастании параметра  $k$ , дзета-функция стремится к единице.

Аналогичные оценки справедливы и для ряда  $\sigma_c(k)$ .

## Асимптотика рядов $\sigma_s$ и $\sigma_c$ при $t \rightarrow \infty$

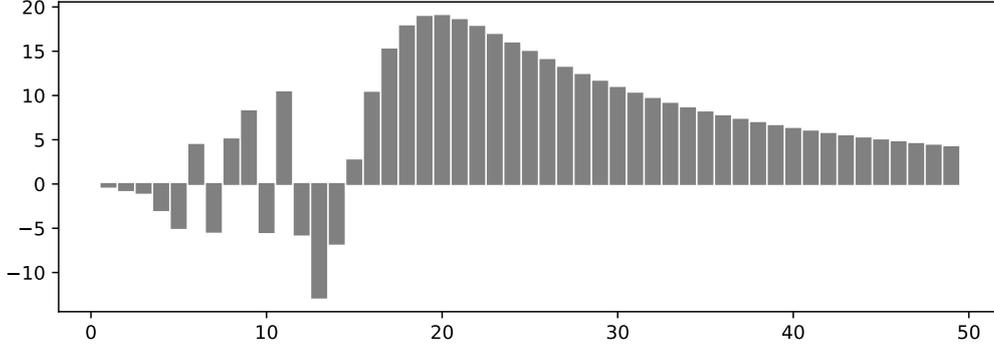


Рис. 1: Типичная форма функции под знаком суммы. Знак функции может изменяться вплоть до  $n = \lfloor (2t/\pi)^{1/p} \rfloor$ , где квадратные скобки обозначают целую часть числа. Здесь  $t = 10000$ ,  $k = 2$ ,  $p = 3$ .

Обозначили  $N = \lfloor (2t/\pi)^{1/p} \rfloor$ , где квадратные скобки имеют смысл целой части числа. Представили ряд как сумму рядов с осциллирующей частью и знакопостоянного ряда:

$$\sigma_s = \sum_{n=1}^N n^{p-k} \sin\left(\frac{t}{n^p}\right) + \sum_{n=N+1}^{\infty} n^{p-k} \sin\left(\frac{t}{n^p}\right). \quad (4)$$

Пришли к выводу, что интеграл в правой части сходится. Он имеет слабую особенность при  $\tau = 0$ . Главный член асимптотики ряда имеет вид:

$$\sum_{n=1}^N n^{p-k} \sin\left(\frac{t}{n^p}\right) = O(t^{(p-k)/p}). \quad (5)$$

$\alpha = (k-1)/p$ , тогда асимптотику ряда  $\sigma_s$  можно представить в виде:

$$\sigma_s \sim \frac{t^{1-\alpha}}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau^{\alpha-2} \sin(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Аналогично была найдена асимптотика ряда  $\sigma_c$ :

$$\sigma_c \sim - \left( \frac{1}{2\pi^{1-\alpha} p(1-\alpha)} + \frac{1}{p} \int_0^\pi \tau^{\alpha-2} \sin^2(\tau/2) d\tau \right) t^{1-\alpha}. \quad (7)$$

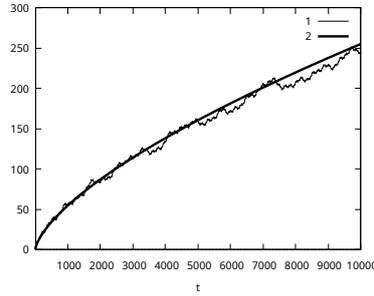


Рис. 2: Коэффициент для функции  $\sin(t)$  в формуле (1) для решения. Кривая 1 вычисляется по первым 200 членам ряда, кривая 2 вычисляется по асимптотике основного члена от  $t \rightarrow \infty$ .

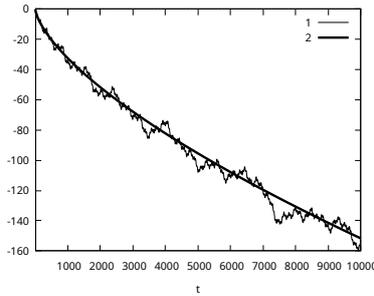


Рис. 3: Коэффициент для функции  $\cos(t)$  в формуле (1) для решения. Кривая 1 вычисляется по первым 200 членам ряда, кривая 2 вычисляется по асимптотике основного члена от  $t \rightarrow \infty$ .

Главный член асимптотики имеет вид:

$$u \sim (C_s \sin(t) + C_c \cos(t)) t^{1-\alpha}, \quad (8)$$

где

$$C_s = \frac{1}{p} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tau^{\alpha-2} \sin(\tau) d\tau,$$

$$C_c = - \left( \frac{1}{2\pi^{1-\alpha} p (1-\alpha)} + \frac{1}{p} \int_0^{\pi} \tau^{\alpha-2} \sin^2(\tau/2) d\tau \right).$$

Обозначим:

$$A_\alpha = p \sqrt{C_s^2 + C_c^2}, \quad \phi_\alpha = \arctan \left( \frac{C_c}{C_s} \right),$$

Тогда асимптотика решения (8) может быть представлена в виде:

$$u \sim \frac{1}{p} A_\alpha t^{1-\alpha} \sin(t + \phi_\alpha). \quad (9)$$

Заметим, что для  $\alpha \rightarrow 0$ , осциллирующая часть решения стремится к осциллирующей части в резонансном решении.

При  $t \rightarrow \infty$  асимптотика решения задачи Коши для уравнения с почти периодической правой частью имеет вид (9), где

$$\alpha = (k - 1)/p.$$

Обратим внимание, что для малых значений  $\alpha$  рост амплитуды субрезонансного решения близок к линейному, а сдвиг фазы малый. То есть осциллирующая часть решения стремится к осциллирующей части в резонансном решении. Следовательно, что в случае воздействия на осциллятор почти-периодической силы, появляются колебания, близкие к резонансным, которые проявляются с возрастающей амплитудой. Амплитуда таких колебаний растет медленнее, чем в резонансном случае. Получена формула для асимптотического поведения этого роста и свойств внешней силы (9).

Также рассмотрели линейное уравнение второго порядка:

$$u'' + (\omega^2 + \epsilon q(t))u = 0$$

$$u'' + (\omega^2 + \epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^k} \cos\left(\left(2 - \frac{1}{n^p}\right)t\right))u = 0, \quad (10)$$

$$k > 1, p > 0$$

$\epsilon$  –малый положительный параметр. Амплитуда стремится к нулю, частота стремится к резонансной частоте, в этом случае появляются субрезонансные решения. Параметр  $\omega$  немного отличен от 1:  $\omega = 1 + \delta$ . Здесь  $\delta$  является параметром уравнения и определяет отличие от точной субрезонансной частоты.

### Асимптотический подход

Было построено асимптотическое решение в виде:

$$u \sim u_0 + \epsilon u_1, \quad (11)$$

$\tau = \epsilon^\gamma t$  медленное время.

Уравнение для первой поправки:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} u_1 + u_1 \omega^2 + q(t) (b \sin(\omega t) + a \cos(\omega t)) - \\ - 2a_1 \omega \sin(\omega t) + 2b_1 \omega \cos(\omega t) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

здесь  $a_1 = \epsilon^{\gamma-1} a'$  и  $b_1 = \epsilon^{\gamma-1} b'$ , штрих означает производную по медленному времени  $\tau$ . Функции  $a, b, a_1, b_1$ , которые зависят от медленного времени, рассматриваются как постоянные, когда они дифференцируются и интегрируются по быстрому времени.

Задача состояла в том, чтобы найти зависимость от  $\tau$  для  $a$  и  $b$ .

Обозначив,

$$f(t) = -q(t) (b \sin(\omega t) + a \cos(\omega t)).$$

В этом случае общее решение для уравнения первой поправки может быть записано в виде:

$$u_1 = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) - b_1 t \sin(\omega t) - a_1 t \cos(\omega t) + \\ + \frac{\cos(\omega t)}{\omega} \int_0^t f(\tilde{t}) \sin(\omega \tilde{t}) d\tilde{t} - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \int_0^t f(\tilde{t}) \cos(\omega \tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Сделав замену в подынтегральной функции  $\omega \tilde{t} \equiv \tilde{t} + \delta \tilde{t} = \tilde{t} + \kappa \tau$ ,  $\kappa = \delta/\epsilon^\gamma$ . После последовательного интегрирования всех частей по  $\tilde{t}$ , выделили максимальный порядок по отношению к  $n$  для полученной формулы, в решении  $u_1$  растущие члены по  $t$  объединены в ряды при  $\cos(\omega t)$ :

$$-\frac{a}{4\omega} \left( \cos(2\kappa\tau) \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-k} \left( \cos\left(\frac{t}{n^p}\right) - 1 \right) - \right. \\ \left. \sin(2\kappa\tau) \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-k} \sin\left(\frac{t}{n^p}\right) \right) + \\ -\frac{b}{4\omega} \left( \sin(2\kappa\tau) \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-k} \left( \cos\left(\frac{t}{n^p}\right) - 1 \right) + \right. \\ \left. \cos(2\kappa\tau) \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-k} \sin\left(\frac{t}{n^p}\right) \right) - a_1 t$$

и  $\sin(\omega t)$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{b}{4\omega} \left( \sin(2\kappa\tau) \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-k} \sin\left(\frac{t}{n^p}\right) + \right. \\
& \left. \cos(2\kappa\tau) \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-k} \left(1 - \cos\left(\frac{t}{n^p}\right)\right) \right) + \\
& -\frac{a}{4\omega} \sin(2\kappa\tau) \left( \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-k} \left(\cos\left(\frac{t}{n^p}\right) - 1\right) - \right. \\
& \left. \cos(2\kappa\tau) \sum_{n=1}^{\infty} n^{p-k} \sin\left(\frac{t}{n^p}\right) \right) - b_1 t.
\end{aligned}$$

В этих формулах сократили обе части на  $t$  и сделав замену  $t = \frac{\tau}{\epsilon^\gamma}$ .

Обозначив:

$$A = \sqrt{C_s^2 + 4C_c^2}, \quad \phi = \arctan\left(\frac{2C_c}{C_s}\right), \quad \frac{A}{4\omega} = B$$

$z = a + ib$ ,  $z = Ze^{i\kappa\tau + \frac{i\phi}{2}}$ . Система также может быть написана в комплексной форме:

$$iZ\kappa e^{\frac{i\phi}{2} + i\kappa\tau} + \left(\frac{d}{d\tau}Z\right) e^{\frac{i\phi}{2} + i\kappa\tau} = \frac{B\bar{Z} e^{\frac{i\phi}{2} + i\kappa\tau}}{\tau^\alpha}.$$

Записав  $Z$  как сумму действительной и мнимой частей:  $Z = w + iv$ .

В результате получили систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}w &= \frac{Bw}{\tau^\alpha} + v\kappa, \\
\frac{d}{d\tau}v &= -w\kappa - \frac{Bv}{\tau^\alpha}.
\end{aligned} \tag{13}$$

**Сравнение асимптотического решения и численного счета.**

Рассмотрели свойства производной системы (13) для различных значений параметров.

В случае  $\kappa = 0$  возникает точный субрезонанс, и система распадается на два уравнения. Их решения имеют следующий вид:

$$w = C_1 \exp\left(\frac{B\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right), \quad v = C_2 \exp\left(\frac{-B\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right).$$

Здесь видно, что решение растёт экспоненциально из-за  $w(t)$ .

Если  $\kappa \neq 0$ , то существует небольшое отличие от частоты субрезонанса. Мы разделяем обе части уравнений по параметру  $\kappa$  и переписываем  $\kappa\tau = \theta$ . В этом случае мы получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}w &= \frac{Bw}{\kappa^{1-\alpha}\theta^\alpha} + v, \\ \frac{d}{d\theta}v &= -\frac{Bv}{\kappa^{1-\alpha}\theta^\alpha} - w. \end{aligned}$$

Перепишем  $B\kappa^{\alpha-1} = \lambda$ , тогда:

$$\frac{d}{d\theta}w = \frac{\lambda}{\theta^\alpha}w + v, \quad \frac{d}{d\theta}v = -\frac{\lambda}{\theta^\alpha}v - w.$$

Здесь  $\lambda > 0$  является параметром уравнения, а  $\kappa = 0$ ,  $\lambda = \infty$ .

Эта система приводит к дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2}{d\theta^2}w + \left(1 - \frac{\lambda^2}{\theta^{2\alpha}} + \frac{\alpha\lambda}{\theta^{\alpha+1}}\right)w = 0.$$

Здесь  $\lambda$  является большим параметром. Таким образом, асимптотическое решение может быть получено с помощью метода

ВКБ:

$$w \sim C_1 \frac{\exp\left(\int_1^\theta \sqrt{\frac{\lambda^2}{\theta^{2\alpha}} - \frac{\alpha\lambda}{\theta^{\alpha+1}} - 1} d\theta\right)}{\sqrt[4]{\frac{\lambda^2}{\theta^{2\alpha}} - \frac{\alpha\lambda}{\theta^{\alpha+1}} - 1}}.$$

Точкой поворота в методе ВКБ является тот момент, когда ВКБ разложение оказывается непригодным. когда знаменатель в формуле  $w$  мал. В этой области изменяется характер решения. Таким образом, поворотный момент для изменения характера роста решения находится в непосредственной близости от этой точки

$$\theta_* \sim \lambda^{1/\alpha}.$$

Сравнили положение точки поворота, полученное асимптотическим путем, с результатами, полученными численно, приведенными на рисунке (6).

Для численного примера использовали следующие данные:

$$k = 2, \quad p = 5, \quad \alpha \equiv (k - 1)/p = 1/5, \quad \gamma \equiv 1/(1 - \alpha) = 5/4,$$

$$A \sim 1.09264275,$$

$$B \equiv \frac{A}{4\omega} \sim 1/4, \quad \lambda = 5, \quad \kappa \equiv (B/\lambda)^{1/(1-\alpha)} \sim \left(\frac{1}{4}\right)^{5/4},$$

$$\epsilon = 0.1, \quad \delta = \epsilon^{\gamma\kappa}, \quad \theta_* \sim \lambda^{1/\alpha}, \quad T = \frac{\theta_*}{\kappa\epsilon^\gamma} \sim 900473.$$

Эти асимптотические результаты согласуются с рисунком (6). Относительная разница между точкой поворота, полученной асимптотическим методом, и точкой поворота, полученной численным методом:

$$|(T - \theta_*)/\theta_*| = |(900473 - 900700)/900700| \sim 0.0003.$$

Нас интересуют конкретные свойства асимптотического решения: скорость роста и область, где этот рост заканчивается. Поскольку задача очень чувствительна к фазовому сдвигу и, как правило, для ее нахождения требуются решения с более высокой степенью точности для малого параметра. Решения задач, связанных с нахождением амплитуды при решении уравнений с почти периодической функцией, являются новыми. Амплитуда хорошо определена, но расчет фазового сдвига не выполнялся, поскольку это другая, более технически сложная задача.

Сравнив численное решение уравнения с полученным асимптотическим решением, при  $\kappa = 0$  асимптотика амплитуды асимптотического решения:

$$U \sim \frac{1}{2} \exp\left(\frac{B\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) (\cos(t) - \sin(t)) + \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{B\tau^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) (\cos(t) + \sin(t))$$

M-огнивающей линии амплитуды.  $M = \sqrt{\cosh(2T)}$

$$T \sim 0.277831 \cdot 0.001 \cdot t^{4/5} \cdot 0.25$$

Определили шаг интегрирования  $s = 300 \cdot \pi / 600000 \sim 0.00157$ . Период колебаний близок к  $2\pi$ , мы берем  $\pi$ , так как это половина периода, интервал интегрирования уравнения равен 150, это количество колебаний. 600000 - количество точек интегрирования, это примерно 1000 шагов интегрирования за одно колебание. Результат показан на рисунке 11. На не очень больших временах, когда  $\epsilon^\gamma t$  не слишком велик, полученное приближение подходит.

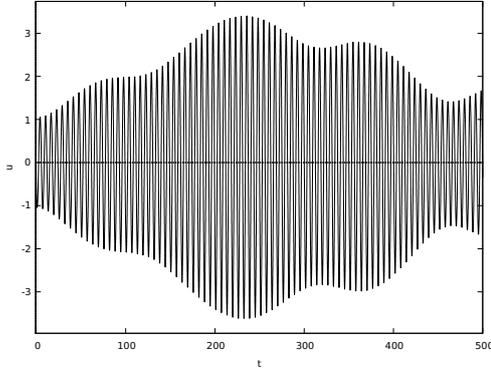


Рис. 4: Типичный график для нерезонансного случая. По горизонтальной оси отложено время, а по вертикальной - функция  $u(t)$ . Для численных решений был использован метод Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом 0,01 и исходными данными:  $t = 0, u = 1, u' = 0$ . В (2) получено 20 слагаемых,  $k = 2$  и  $p = 5$ . На рисунке показаны ограниченные колебания для уравнения  $\omega = 1 + \delta$ , где  $\delta = 0.01, \epsilon = 0.1$ .

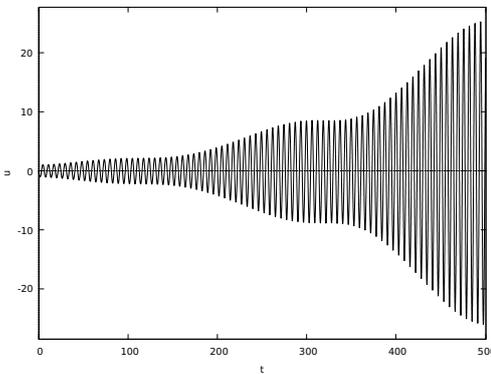


Рис. 5: На рисунке (8) показан рост субрезонанса на начальном интервале. Для численных решений мы использовали метод Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом, равным 0,01, и исходными данными:  $t = 0, u = 1, u' = 0$ . В (2) мы получили 20 слагаемых,  $k = 2$  и  $p = 5$ . На рисунке показано растущее решение при  $\delta = 0.00347, \epsilon = 0.1$ ,

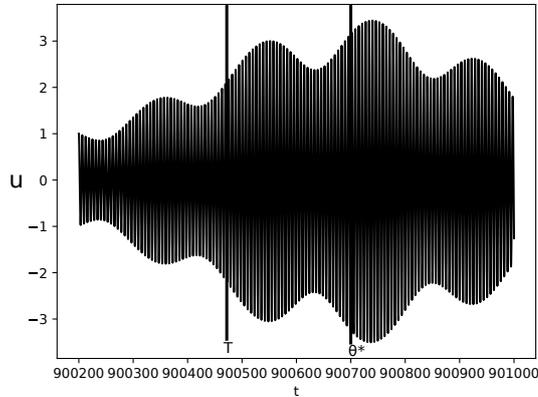


Рис. 6: На графике показана область окончания роста с заданными параметрами. Типичная картина для нерезонансного случая. По горизонтальной оси отложено время, а по вертикальной - функция  $u(t)$ . Для численных решений мы использовали метод Рунге-Кутты 4-го порядка с шагом 0,01 и исходными данными:  $t = 0$ ,  $u = 1$ ,  $u' = 0$ . В (2) было получено 20 слагаемых,  $k = 2$  и  $p = 5$ . На рисунке показана заключительная стадия этого растущего решения в виде тех же  $\delta = 0.00347$ ,  $\epsilon = 0.1$  на очень большом временном интервале около  $t = 900500$ .

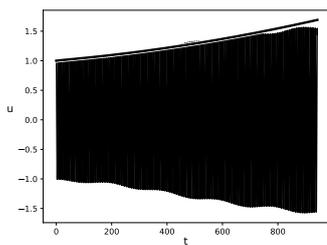


Рис. 7: На рисунке (12) показана амплитуда колебаний  $M$ , согласно расчетам. На горизонтальной оси указано время, а на вертикальной - функция  $u(t)$ . Для численных решений был использован метод Рунге-Кутты четвертого порядка с шагом, равным 0,001, и исходными данными:  $t = 0$ ,  $u = 1$ ,  $u' = 0$ . В (2) было получено 1000 слагаемых,  $\kappa = 0$ ,  $k = 2$  и  $p = 5$ .

## Заклучение

1. Получена формула асимптотического поведения роста амплитуды колебаний линейного уравнения второго порядка с почти-периодической внешней силой.

2. Сделан вывод о том, что в случае воздействия на осциллятор почти-периодической силы, появляются колебания, близкие к резонансным, которые проявляются с возрастающей амплитудой. Амплитуда таких колебаний растет медленнее, чем в резонансном случае.

3. Получена система уравнений для параметрического субрезонансного роста амплитуды колебаний.

4. Асимптотическое решение в случае, когда  $\lambda$  является большим параметром, найдено с помощью метода ВКБ. Таким образом, поворотный момент для изменения характера роста решения находится в непосредственной близости от точки поворота.

5. Проведено сравнение между асимптотическим приближением для времени перехода и численным методом, а также определена относительная разница между точкой поворота, полученной асимптотическим методом, и точкой поворота, полученной численным методом.

## ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ НАУЧНО – КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ:

P.Y.Astafyeva, O.M.Kiselev, "Subresonant solutions of the linear oscillator equation, 2021 International Conference Nonlinearity, Information and Robotics, Innopolis, Russia, pp 90-94.

Astafyeva P. Y., Kiselev O. M., Formal Asymptotics of Parametric Subresonance, Rus. J. Nonlin. Dyn., 2022, Vol. 18, no. 5, pp. 927-937

Астафьева П.Ю., Киселев О.М. Субрезонансный рост амплитуды осцилляций, Уфимская осенняя математическая школа-2022: материалы Междунар. науч. конф. (г. Уфа, 28 сентября-1 октября 2022 г.)/ БашГУ. - Уфа, 2022.