

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение  
Уфимский федеральный исследовательский центр Российской  
академии наук (УФИЦ РАН) Институт механики им. Р.Р.  
Мавлютова - обособленное структурное подразделение  
Федерального государственного бюджетного научного учреждения  
Уфимского федерального исследовательского центра Российской  
академии наук (Имех УФИЦ РАН)

На правах рукописи

**ВОРОБЬЁВ Никита Александрович**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ТЕЧЕНИЯ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ В КАНАЛЕ  
ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ**

Направление 01.06.01 — «Математика и механика»  
Специальность 01.02.05 — «Механика жидкости, газа и плазмы»

Научный доклад

Работа выполнена в Институт механики им. Р.Р. Мавлютова – обособленном структурном подразделении Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

Научный руководитель: **Урманчеев Саид Фёдорович**  
доктор физико-математических наук, профессор

Рецензенты: **Ковалёва Лиана Ароновна**,  
доктор технических наук, профессор,  
Федеральное государственное бюджетное  
общеобразовательное учреждение высшего  
профессионального образца «Башкирский  
государственный университет»,  
заведующая кафедрой прикладной физики

**Кулешов Василий Сергеевич**,  
кандидат физико-математических наук,  
ООО «РН-БашНИПИнефть»,  
ведущий специалист

## Общая характеристика работы

### Актуальность темы.

Исследование динамики дисперсных систем в различных областях является актуальной проблемой современной науки и техники. Пример таких систем представляют эмульсии, которые встречаются во многих отраслях промышленности: нефтегазовой, строительной, автомобильной, пищевой, биотехнологии, медицине, а также в микро и нанотехнологиях. В нефтяной области эмульсии возникают практически на каждом этапе добычи, переработки и транспортировки нефтяного сырья, например, в потокоотклоняющих технологиях, при глушении скважин и для выравнивания профиля приемистости скважин.

Эмульсии представляют собой дисперсные системы, состоящие из двух несмешивающихся жидкостей, одна из которых диспергирована в другой в виде капель. Примеры эмульсий, встречающихся в повседневной жизни — майонез, молоко, сметана, косметические эмульсии, водоэмульсионные краски. Некоторые технологические процессы включают в себя стадию эмульгирования. Постоянный интерес к многостороннему исследованию эмульсий, обуславливается их практической значимостью. Эмульсии, в отличие от суспензий, могут существовать при концентрации капель, превышающей объемную концентрацию при наиболее плотной упаковке в суспензиях. Функциональная часть эмульсии, которая определяет её потребительские качества, может быть сосредоточена как в диспергированных каплях, так и в дисперсионной среде, играющей роль носителя или связующего. Эмульсии подразделяются на прямые и обратные. По определению, прямая эмульсия это капли неполярной жидкости в полярной среде и, соответственно, наоборот. При исследовании течения эмульсий в микроканалах различной геометрии обнаружен эффект, названный «динамическим запиранием». Эффект заключается в том, что расход эмульсии через микроканал со временем снижается на два и более порядка, несмотря на наличие постоянного градиента давления.

Для моделирования используются основные принципы распространённого численного метода контрольного объема для двухфазных сред наиболее полно был введен в работах А.А. Самарского (интегро-интерполяционный метод), S.V. Patankar и D.B. Spalding. Дальнейшие модификации МКО преимущественно были связаны с интеграцией МКО и других методов численного интегрирования, с развитием техник построения сеток контрольных объемов (КО) либо с внедрением различных схем расчета потоков зависимых переменных на гранях КО. Схемы, построенные с применением МКО, можно формально разделить на две группы: схемы, основанные на расчете плотности [Годунов, 1976] с явной аппроксимацией по времени, используемые, как правило, при расчетах быстрых

процессов; схемы, основанные на расчете давления [Патанкар, 1984], частично либо полностью неявные по времени.

Для описания течения дисперсной системы используются соотношения в рамках уравнений Навье-Стокса. Уравнение неразрывности для двухфазной среды выглядят следующим образом

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_1 u_1)}{\partial x^1} + \frac{\partial(\rho_1 v_1)}{\partial x^2} = 0, \\ \frac{\partial \rho_2}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_2 u_2)}{\partial x^1} + \frac{\partial(\rho_2 v_2)}{\partial x^2} = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\rho_i = \alpha_i \rho_i^0$ ,  $\rho_i$ - осредненная плотность  $i$ -фазы,  $\rho_i^0$ - истинная плотность  $i$ - фазы.

Уравнения движения дисперсионной фазы

$$\begin{cases} \rho_1 \frac{d_1 u_1}{dt} = -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x^1} + \frac{\partial \tau^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \tau^{12}}{\partial x^2} + F_{21}^1, \\ \rho_1 \frac{d_1 v_1}{dt} = -\alpha_1 \frac{\partial p}{\partial x^2} + \frac{\partial \tau^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial \tau^{22}}{\partial x^2} + F_{21}^2; \end{cases} \quad (2)$$

$F_{12}^1 = \eta_\mu \alpha_1 \alpha_2 a_2^{-2} \mu_1 (u_1 - u_2)$ ,  $F_{12}^2 = \eta_\mu \alpha_1 \alpha_2 a_2^{-2} \mu_1 (v_1 - v_2)$  -силы межфазного взаимодействия.

Уравнения движения дисперсной фазы

$$\begin{cases} \rho_2 \frac{d_2 u_2}{dt} = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{2*}^{11}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{2*}^{12}}{\partial x^2} + F_{12}^1, \\ \rho_2 \frac{d_2 v_2}{dt} = -\alpha_2 \frac{\partial p}{\partial x^2} + \frac{\partial \sigma_{2*}^{21}}{\partial x^1} + \frac{\partial \sigma_{2*}^{22}}{\partial x^2} + F_{12}^2; \end{cases} \quad (3)$$

$\sigma_{2*}^{lk}$ - тензор напряжений для концентрированных смесей (возникает при контакте частиц).

Заметим, что уравнения течения и фильтрации часто носят параболический характер, то есть дифференциальные уравнения описывающие процессы течения жидкости или фильтрации имеют параболический тип. Для некоторых классов уравнений встает вопрос о существовании и единственности решения. В связи с этим, рассматривается вопрос теоретического исследования в области доказательства существования решений уравнений параболического типа.

Существование слабого решения уравнения  $(\beta(u))'_t = \text{div}(\beta(u), \nabla u)$  (и систем таких уравнений) и единственность в предположении  $(\beta)'_t \in L_1(D^T)$  доказаны.

В некоторых работах показывают необходимость расширения понятия решения в случае уравнения  $\Delta_p u = F(x, u)$  с  $L_1$  данными:  $\sup_{|u| < c} F(x, u) \in L_{1,loc}(\Omega)$ . А именно, они рассматривают энтропийное решение задачи Дирихле для эллиптического уравнения и доказывают его существование и

единственность. Авторы указывают, что вместо энтропийного решения, введенного впервые С.Н. Кружковым для уравнений первого порядка, можно рассматривать также ренормализованные решения. Понятие ренормализованного решения было впервые введено при изучении задачи Коши для уравнения Больцмана.

Также доказаны существование и единственность ренормализованного решения уравнения  $u_t - \operatorname{div}_x(t, x, \nabla u) = f$  со степенными нелинейностями. Для этого же уравнения доказаны существование и единственность энтропийного решения и показана его эквивалентность ренормализованному решению.

Существование ренормализованного решения первой смешанной задачи в ограниченной области для изотропного уравнения (16) с нестепенными нелинейностями доказана при сильном ограничении  $0 < c < \beta'_u < C(K)$ ,  $\nabla_x \beta'_u < C(K)$ ,  $|u| < K$ . Эти условия не выполнены даже в степенном случае  $\beta(r) = r^q$ ,  $q > 0, q \neq 1$ . Существование и единственность ренормализованного решения первой смешанной задачи в ограниченной области для уравнения (16) с  $\beta = u$  и переменными нелинейностями доказана.

**Целью** данной работы является исследование и построение моделей течения дисперсных сред в каналах. Расширение классических моделей фильтрации в пористых средах, построение многопараметрической модели течения дисперсной системы в пористых средах. Исследование деформации дисперсных частиц при течении в каналах.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать распределение физических параметров высококонцентрированной эмульсии
2. Разработать и улучшить модель осаждения и мобилизации частиц суспензии в пористой среде
3. Исследование особенностей динамики деформируемых капель при течениях в микроканал
4. Доказать существование ренормализованного решения параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева-Орлича

**Научная новизна:**

1. Построена многопараметрическая модель течения суспензии в пористой среде при нелинейном законе фильтрации
2. Исследованы особенности динамики деформируемых капель в ограниченном канале
3. Доказано существование ренормализованного решения параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева-Орлича

**Практическая значимость** На основе построенной многопараметрической модели течения суспензии в пористой среде можно проводить расчеты при бурении скважин и кольматации призабойной зоны. Также

можно детально исследовать динамику капель при течении в микроканалах, что применительно как в нефтяной отрасли, так и с точки зрения медицины.

### **Основные положения, выносимые на защиту:**

1. математическая модель течения суспензии в пористой среде по нелиному закону фильтрации
2. результаты моделирования динамики деформируемых капель при течении в микроканалах
3. доказательство теоремы о существовании ренормализованного решения параболического уравнения в анизотропных пространствах Соболева-Орлича

**Достоверность** полученных результатов в рамках настоящей диссертации обеспечивается корректностью применяемых математических моделей, основанных на законах сохранения механики сплошных сред. Проведение ряда различных сравнительных расчетов показало, что результаты находятся в соответствии с аналитическими решениями, экспериментальными данными, а также численными результатами, полученными другими авторами.

**Апробация работы.** Основные результаты работы докладывались на: ученых семинарах в ФГБУН Институте механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН, конференции "Ломоносов-2018" в МГУ (г. Москва, 2018), VI Российской конференции "Многофазные системы: модели, эксперимент, приложения" (Уфа, 26-30 июня 2017 г.), Международной математической конференции по теории функций, посвященная 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф.Леонтьева (Уфа, 24-27 мая, 2017 г.)

**Личный вклад.** Автор работы участвовал в постановке задач, разработке и реализации методов решения. Автором построена вычислительная программа на основе метода контрольного объема; проведены численные эксперименты и аналитические исследования по исследуемым задачам. Описаны и проанализированы результаты проводимых исследований.

**Публикации.** Основные результаты по теме диссертации изложены в 4 печатных изданиях, 2 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 1 - в изданиях, приравненных к публикациям в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, 1 - в тезисах докладов конференций.

## **Содержание работы**

Во **введении** отображена актуальность проводимых исследований в рамках данной научно-квалификационной работы, по рассматриваемым исследованием ставятся задачи и формулируются цели, по каждой изучаемой проблеме приводится обзор научной литературы, излагается научная

новизна и практическая значимость представляемой работы. Каждая последующая глава представляет собой исследуемые задачи, где приводится описание метаматической модели, численных подходов и результатов исследования.

**Первая глава** посвящена оценкам физических параметров высококонцентрированной эмульсии в канале переменного сечения при установившемся течении. Рассматривался эффект "динамического запирания" при течении высококонцентрированной эмульсии в канале с переменным сечением (рис 2). Приведены экспериментальные исследования запирания выполненные А.Т.Ахметовым и А.А.Валиевым и показано изменение зависимости объема и скорости течения эмульсии от времени (рис. 1). Таким образом экспериментально показано прекращение течения эмульсии.

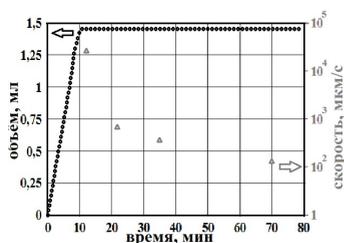


Рис. 1 — Зависимость объема и скорости течения эмульсии от времени, полученная весовым методом (окружности) и оптической микроскопии с видеозаписи (треугольники).

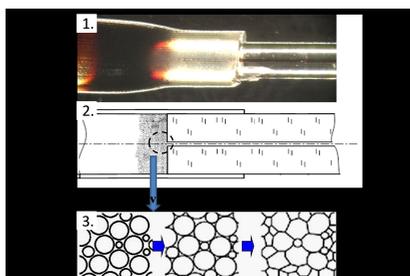


Рис. 2 — 1.фотография микроканала с подводящей трубкой, 2. схематичное представление микроканала, 3. поведение капель при проявлении «запирания».

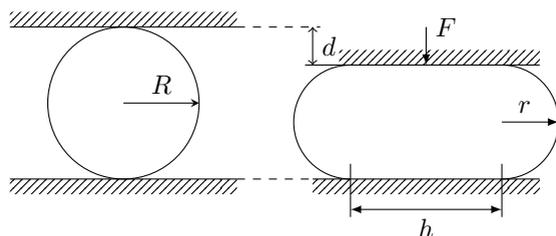


Рис. 3 — Схематичное изображение частицы. Слева — до деформации, справа — после деформации.

Для понимания эффекта "динамического запирания" сделаны оценки параметров частицы эмульсии. Рассматривается сдавливание частицы плоскостью (рис. 3). Соотношение для диаметра окружности контакта

капли со сдавливающими плоскостями представляется зависимостью от величины сдавливания  $h = h(d)$

$$h = \frac{\sqrt{\frac{\pi^2 r^4}{4} + \frac{8}{3} r (R^3 - r^3)} - \frac{\pi r^2}{2}}{r},$$

где  $r = r(d) = R - \frac{d}{2}$ .

Выражение для пористости  $m = m(d)$  от величины смещения:

$$m = 1 - \frac{2\pi r \left( r + \frac{h}{2} \right)^2}{\frac{\pi r h^2}{2} + \frac{4\pi r^3}{3} + \frac{\pi^2 h r^2}{2}},$$

На основе уравнения Лапласа получена зависимость изменения давления в капле  $\Delta P = \Delta P(d)$  от величины смещения, обусловленного приложенной нагрузкой:

$$\Delta P = \sigma \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{h}{2} + r} - \frac{2}{R} \right).$$

На основе полученных оценок, можно объяснить процесс возникновения эффекта "Динамического закипания".

**Вторая глава** посвящена изучению течения суспензии в пористой среде с учетом осаждения и мобилизации части при разных режимах фильтрации. Модель течения суспензии рассматривается в рамках трех-континуального подхода: взвешенные частицы, осажденные частицы и несущая фаза. Течение суспензии описывается следующими уравнениями:

$$\frac{\partial(C\phi_c)}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial(CUr)}{\partial r} = -UC\lambda(\sigma) + \alpha\sigma\delta(U - U_{crit}), \quad (4)$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = UC\lambda(\sigma) - \alpha\sigma\delta(U - U_{crit}), \quad (5)$$

$$\frac{\partial(Ur)}{\partial r} = 0; \quad (6)$$

где  $C$ — концентрация взвешенных частиц,  $\sigma$ — концентрация осажденных частиц,  $\phi_c = \phi_0 - \frac{\sigma}{C_{max}}$ — пористость среды с учетом осажденных частиц,  $\alpha$ — коэффициент мобилизации частиц,  $U$ — скорость фильтрации суспензии,  $\delta(U - U_{crit})$ — функция равная 1 при  $U > U_{crit}$  и 0 в противном случае,

$$\lambda = \lambda_0(1 + \beta\sigma) \quad (7)$$

Здесь  $\lambda_0$ — начальный коэффициент кольтатации,  $\beta$ — коэффициент осаждения частиц.

В зависимости от характеристик порового пространства и скорости фильтрации можно выбрать закон Дарси или Форхгеймера

$$U_i = - \frac{k(\sigma)}{\mu(C)} \nabla_i p \quad \text{- закон Дарси,} \quad (8)$$

$$U_i = - \left( \frac{k(\sigma)}{\mu(C)} - \frac{\beta k^{2.5}(\sigma) \rho}{\mu^3(C)} |\nabla p| \right) \nabla_i p \quad \text{- закон Форхгеймера,} \quad (9)$$

где  $\mu(C)$ — вязкость суспензии,  $k(\sigma)$ — проницаемость,  $\beta$ — параметр определяемый экспериментально.

Для вязкости суспензии используется выражение в виде

$$\mu(C) = \mu_0 \left( 1 - \frac{C}{C_{max}} \right)^{-1.89}, \quad (10)$$

Также вводим выражение для зависимости проницаемости породы от концентрации осажденных частиц

$$k(\sigma) = k_0 \left( 1 - \frac{\sigma}{\phi_0 C_{max}} \right)^3. \quad (11)$$

На основе полученной математической модели сформулирован численный алгоритм решения задачи. Для дискретизации применялся метод контрольного объема, получаемая система линейных уравнений решалась методом прогонки, для нелинейных уравнений использовался метод Ньютона-Рафсона. Численный алгоритм выглядит следующим образом: 1) Находится давление  $p$ ;

- 2) Определяется скорость суспензии  $U$  по закону фильтрации;
- 3) Находится концентрация осажденных частиц  $\sigma$ ;
- 4) Пористость  $\phi_c$  и коэффициент кольтатация  $\lambda$  определяется из замыкающих соотношений;
- 5) Рассчитывается концентрация взвешенных частиц  $C$  ;
- 6) В конце определяется вязкость  $\mu$  и проницаемость  $k$ .

Данный алгоритм применяется для каждого шага по времени, до тех пор пока момент времени  $t$  не достигнет наперед заданного значения  $t_{max}$ .

На основе построенной математической модели оценивалось распределение концентрации взвешенных и осажденных частиц

рис. 4. Для модели задавались следующие параметры: начальная концентрация взвешенных частиц  $c_0 = 0.1$ , коэффициент мобилизации  $\alpha = 0.1$ , коэффициент кольтатации  $\beta = 0.2$ , градиент давления  $\Delta P = 1$  атм., начальная пористость  $\phi_0 = 0.2$ . По результатам тестирования видно, что

большая часть частиц осаждается вблизи входной границы. Таким образом, следует, что на входе происходит падение проницаемости пористой породы. С практической стороны, при бурении скважин, загрязнение призабойной зоны является существенной проблемой. Происходит падение дебита скважины, поломка оборудования (насоса) при попадании частиц раствора. С помощью данной модели, можно давать оценку глубины проникновения раствора суспензии в призабойную зону пласта.

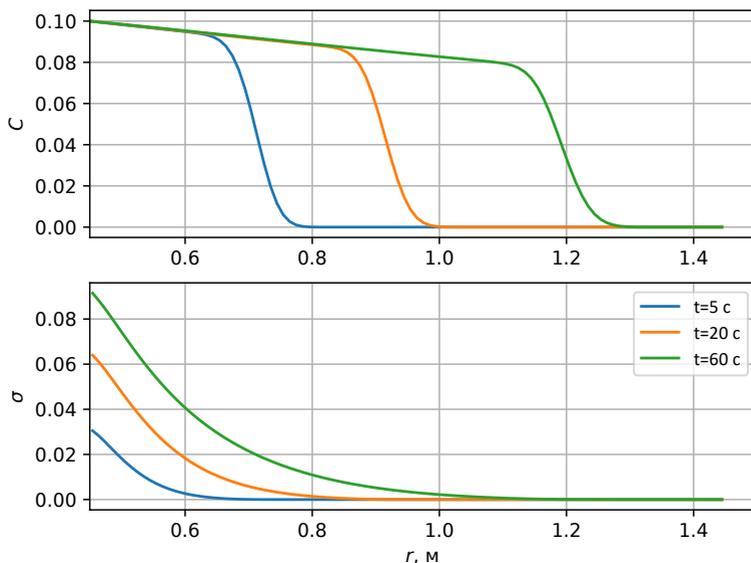


Рис. 4 — Распределение концентрации взвешенных частиц  $C$  и осевших  $\sigma$  частиц вдоль пористого образца в разные моменты времени

Рассмотрим поведение модели в зависимости от коэффициента мобилизации рис. 5. В результате получаем, что концентрация взвешенных частиц распределяется в зависимости от коэффициента мобилизации по-разному. При моделировании процессов фильтрации суспензии стоит учитывать коэффициент мобилизации частиц в пористых средах.

В силу того, что процессы фильтрации могут происходить при больших градиентах давления или при сложной структуре порового пространства, следует учитывать и этот фактор. Для учета инерционных сил водится двучленный закон фильтрации (закон Форхгеймера). Сравнение линейного и нелинейного закона фильтрации представлено сравнением распределения давления и концентрации взвешенных частиц рис. 6, 7. Таким

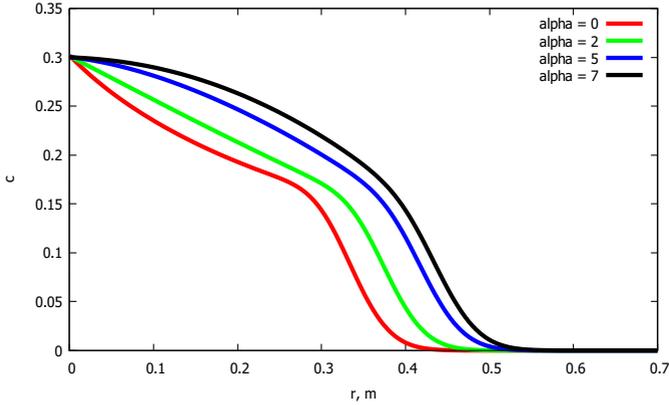


Рис. 5 — Распределение концентрации взвешенных частиц  $C$  в зависимости от коэффициента  $\alpha$ .

образом, модель фильтрации суспензии в пористой среде дополняется множеством параметров моделирования, что позволяет более детально описать процесс фильтрации.

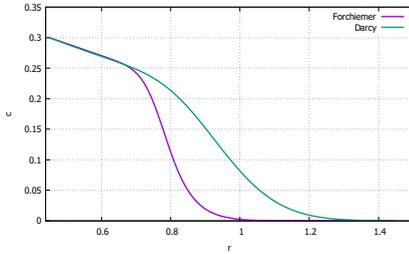


Рис. 6 — Распределение концентрации взвешенных частиц  $C$  в зависимости от закона фильтрации.

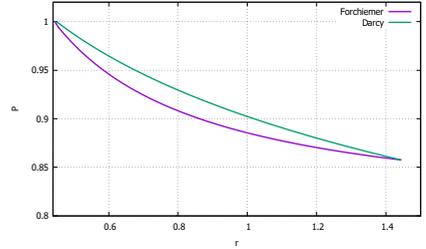


Рис. 7 — Распределение давления в зависимости от закона фильтрации.

**Третья глава** посвящена исследованию динамики деформируемых частиц (капель) при течениях в каналах цилиндрической формы. Рассматривается динамика дисперсной смеси двух ньютоновских жидкостей в канале (рис. 8). Течение протекает при малых числах Рейнольдса, поэтому течение описывается уравнениями Стокса для каждой жидкости

$$\nabla \cdot \sigma_i = -\nabla p_i + \mu_i \nabla^2 u_i = 0, \nabla \cdot u_i = 0, i = 1, 2, \quad (12)$$

где  $\sigma$ - тензор напряжений,  $u$  — скорость,  $\mu$  — динамическая вязкость,  $p$  — давление с учетом гидростатического компонента.

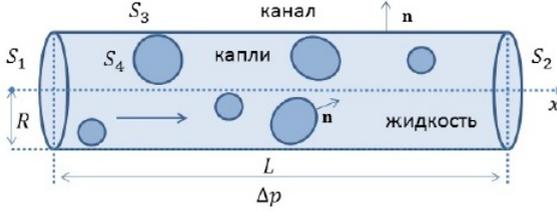


Рис. 8 — Схематическое изображение задачи о периодическом течении вязкой жидкости с каплями в канале

На границе фаз  $S_4$  задаются условия:

$$\begin{aligned} u_1 = u_2 = u, f = \sigma_2 \cdot n_2 - \sigma_1 \cdot n_1 = f_2 - f_1 = fn, \\ f = \gamma(\nabla n(x)) + (\rho_2 - \rho_1)(g \cdot x), x \in S_4, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $x$  - радиус-вектор рассматриваемой точки,  $f$  - вектор нормальных напряжений в жидкости;  $n$  - нормаль к поверхности капли, направленная в жидкость;  $g$  - вектор ускорения свободного падения;  $\gamma$  - коэффициент поверхностного натяжения;  $\rho$  - плотность.

Условие прилипания  $u(x) = 0, x \in S_3$  справедливо для течения в канале, которое дополняется следующими условиями периодичности для скорости и вектора напряжений

$$\begin{aligned} u|_{x=0} = u|_{x=L} = u_s, \\ f|_{x=0} = -f|_{x=L} + f_p = -f_s + f_p, f_p = i_x \nabla p, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\nabla p$  - заданный перепад давления для потока в канале;  $u_s$  и  $f_s$  - неизвестные функции.

Кинематическое условие, описывающее динамику каплей, имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = u(x), x \in S_4 \quad (15)$$

где  $u(x)$  - скорость на поверхности каплей, определяемая из решения эллиптической задачи, описанной выше.

Для численного решения уравнений использовался метод граничных элементов.

Проведено сравнение результатов расчета с экспериментальными данными. Сравнивались полученные формы каплей, в случае, когда диаметр капли сравним с радиусом канала. Результаты показали качественную согласованность экспериментальных и расчетных данных (рис. 9).

Также рассматривалось распределение и форма частиц в цилиндрическом канале в начальный момент времени и при  $t = 9.9$  (рис. 10). Можно наблюдать, что через некоторый промежуток времени капли распределяются согласно параболическому профилю, который характерен для течения Пуайзея.

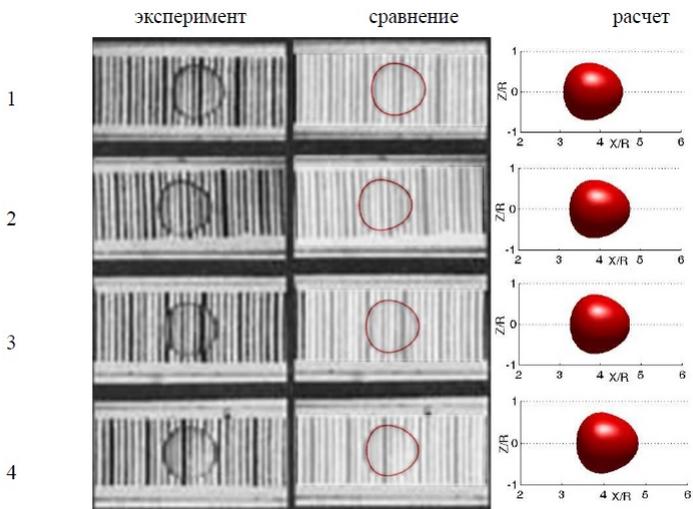


Рис. 9 — Сопоставление с экспериментальными данными

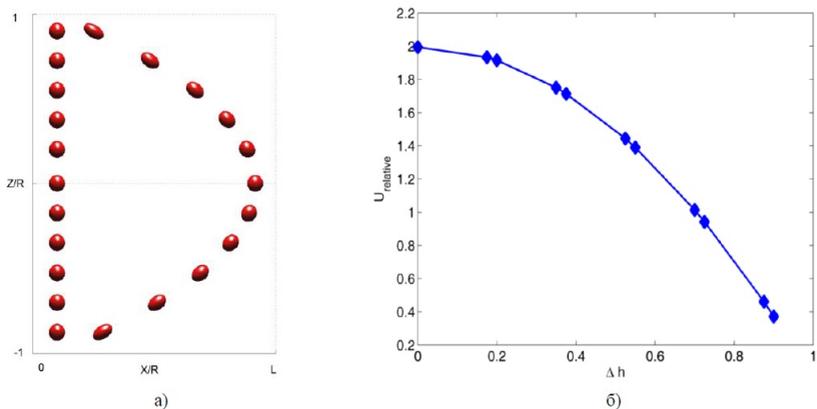


Рис. 10 — Динамика капле в цилиндрическом канале в разные моменты безразмерного времени (а) и значения относительной скорости в зависимости от позиции капли в канале (б),  $\lambda = 1$ ,  $a/R = 0.05$ ,  $L/R = 1.5$ ,  $K = 0.66$ .

Полученные результаты хорошо согласуются с теоретическими и экспериментальными данными. Подобного рода исследования представляют большой теоретический и практический интерес.

В **четвертой главе** доказана теорема о существовании ренормализованного решения параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева-Орлича. Рассматривается первая смешанная задача для некоторого класса анизотропных параболических

$$(\beta(x, u))_t - \operatorname{div}(a(t, x, u, \nabla u)) - b(t, x, u, \nabla u) = \mu \quad (16)$$

с двойными нестепенными нелинейностями в цилиндрической области  $D^T = (0, T) \times \Omega$ . Область  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ограничена.  $\beta(x, u)$  – возрастающая и непрерывна по  $u$  функция, измеримая по  $x$ .  $\mu$  – диффузная мера.

Краевые условия однородны:

$$\beta(x, u(0, x)) = \beta(x, u_0(x)) \in L_1(\Omega); \quad (17)$$

$$u(t, x) \Big|_S = 0, \quad S = \{t > 0\} \times \partial\Omega. \quad (18)$$

Модельным примером уравнений (16) с нестепенными нелинейностями служит уравнение вида:

$$(\beta(u))_t = \sum_{i=1}^n (B'_i(u_{x_i}) + \Psi_i(t, x))_{x_i} + \Phi(t, x), \quad (19)$$

где  $B_i$  –  $N$ -функции,  $\beta(u)$  – возрастающая непрерывная функция,  $\Psi_i(t, x) \in E_{\bar{B}_j}(D^T)$ ,  $\Phi(t, x) \in L_1(D^T)$

Рассматриваются диффузные меры  $M_0(\Omega)$ . Для диффузных мер, в случае нестепенных нелинейностей, справедливо разложение, записанное в следующем виде:

$$\mu = f + \operatorname{div}G + (g)_t, \quad G \in (L_{p'}(\Omega))^N, \quad f \in L_1(\Omega), \quad g \in L_p((0, T); V) \quad (20)$$

где  $V = L_2(\Omega) \cap \dot{W}_p^1(\Omega)$ .

Для других случаев нелинейности, разложение (5) не доказано.

При наличии  $(g)_t$  в разложении  $\mu$  получаем сильные ограничения на функцию  $\beta(x, u)$ . Поэтому будем рассматривать диффузные меры в частном виде.

Введем предположения:

Запишем условие коэрцитивности:

$$a(t, x, r, y) \cdot y \geq \delta_0 S(y) - C_1 F(t, x), \quad S(y) = \sum_{i=1}^n B_i(y_i), \quad F \in L_1(D^T) \quad (21)$$

где  $B_j$  – некоторые  $N$ -функции.

Пусть существуют непрерывная функция  $C(m)$  и неотрицательные функции  $F$  и  $F_j \in E_{\overline{B}_j}(D^T)$  такие, что

$$|a_j(t,x,r,y)| \leq C(m)(F_j(t,x) + \overline{B}_j^{-1}(C(m)S(y))), \quad (22)$$

при всех  $r \in [-m, m]$ ,  $y, z \in \mathbb{R}^n$ ,  $(t, x) \in D^T$ .

Положим  $b(t,x,r,y) = b(t,x,0,y) - b_0(t,x,r,y)$ . Пусть  $|b(t,x,0,y)| \leq F(t,x)$ ,

$$rb_0(t,x,r,y) \geq 0, \quad \forall r \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^n; (t,x) \in D^T; \quad (23)$$

$$|b_0(t,x,r,y)| \leq C(m)(S(y) + F(t,x)), |r| \leq m; \forall m > 0. \quad (24)$$

Рассмотрим диффузные меры частного вида

$$\mu = f(t,x) - \text{div}G(t,x)$$

Здесь  $f \in L_1(\Omega)$ ,  $G_j \in E_{\overline{B}_j}(D^T)$ .

Положив  $\tilde{a} = a + G$ ,  $\tilde{b} = b - f$ , условия (7), (8), (9) сохраняются.

В силу того, что условие коэрцитивности (6) записано со слагаемым  $C_1 F(t,x)$  в правой части, то и оно не нарушится.

Условие монотонности запишем в следующем виде:

$$\Lambda(t,x,r,y,z) = (a(t,x,r,y) - a(t,x,r,z)) \cdot (y - z) > 0, y \neq z. \quad (25)$$

Введем понятие ренормализованного решения.

**Определение 1.** Ренормализованным решением задачи (16)–(18) называется измеримая функция  $u : D^T \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

- 1)  $T_k(u) \in \dot{W}_{LB}^{0,1}(D^T)$  при всех  $k > 0$ ;  $\nabla u : \chi(|u| < k) \nabla u = \nabla T_k(u)$ ;
- 2)  $\tilde{b}(u) = b(t,x,u, \nabla u) \in L_1(D^T)$ ;  $\beta(x,u) \in L_1(D^T)$ ;

функция  $\tilde{a}(u) = a(t,x,u, \nabla u)$  удовлетворяет при всех  $k > 0$  условиям:

$$[\chi(m \leq |u| \leq m+1) \tilde{a}(u) \cdot \nabla u] \rightarrow 0 \text{ при } m \rightarrow \infty; \quad (26)$$

При всех  $\xi \in \text{Lip}_0(\mathbb{R})$ ,  $\phi \in C_0^1(D_{-1}^T)$  выполнено равенство

$$\left[ \phi_t \int_{u_0}^u \xi(r) d\beta(x,r) + \tilde{\phi} \tilde{b}(u) \xi(u) \right] = [\tilde{a}(u) \cdot \nabla(\xi(u)\phi)], \beta(x, u_0) \in L_1(\Omega). \quad (27)$$

При выполнении вышеназванных условий, получилось доказать следующую теорему.

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (19)–(25). Тогда существует ренормализованное решение первой смешанной задачи для уравнения (16).

В **заключении** приведены основные результаты работы, которые заключаются в следующем:

1. Построена математическая модель и проведены численные исследования многопараметрической модели течения суспензии в пористой среде с учетом осаждения и мобилизацией частиц при различных законах фильтрации. Показано существенное влияние параметров осаждения и мобилизации частиц на распределение концентрации частиц в пористой среде.
2. Проведено численное моделирование динамики капель эмульсий различного начального радиуса в каналах постоянного и переменного кругового сечения. Показано существенное влияние стенок каналов на форму капель, характер деформации капель размера сравнимого с размером канала совпадает с наблюдаемым во многих экспериментальных исследованиях.
3. Доказано существование ренормализованного решения для параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева-Орлича. Доказательство приводилось при более слабых условиях, что является новым и более общим решением для уравнений параболического типа.

#### **Публикации автора по теме научно-квалификационной работы**

Работы, опубликованные в журналах, рекомендованных ВАК РФ:

1. Н. А. Воробьев, Ф. Х. Мукминов, "Существование ренормализованного решения параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева—Орлича", Дифференциальные уравнения, Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз., 163, ВИНТИ РАН, М., 2019, 39–64.
2. О. А. Абрамова, Ю. А. Питюк, Н. А. Воробьев, И. А. Зарафудинов, "Исследование особенностей динамики деформируемых капель при течении в микроканалах Вестник Башкирского Университета, Том 23, 2018, No. 3., 604-609.

В других изданиях:

3. Воробьев Н.А., Валиев А.А., Ахметов А.Т., Урманчиев С.Ф. Распределение физических параметров высококонцентрированной эмульсии при установившемся течении в канале переменного сечения // Труды Института механики им. Р.Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. 2016. Т. 11, № 2. С. 278–283.
4. Н. А. Воробьев, Ф. Х. Мукминов, "Существование ренормализованного решения параболической задачи в анизотропных пространствах Соболева-Орлича", Международная математическая конференция по теории функций, посвященная 100-летию чл.-корр. АН СССР А.Ф.Леонтьева (Уфа, 24-27 мая, 2017 г.), РИЦ БашГУ, Уфа, 2017, 36-37