



**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное научное учреждение**

**Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук**

Институт математики с вычислительным центром – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

**УТВЕРЖДАЮ**



И.о. заместителя руководителя УФИЦ  
РАН по научно-организационной работе

И.Ф. Шаяхметов

2023 г.

## **ПРОГРАММА**

вступительных испытаний по специальной дисциплине при приеме на обучение по программам аспирантуры – программам подготовки научных кадров в аспирантуре по научной специальности

### **1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика**

Программа вступительных испытаний  
одобрена на заседании Ученого совета ИМВЦ  
от «23» марта 2023 г. Протокол № 3

Уфа 2023

## **Общие указания**

Программа вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика для лиц, желающих проходить обучение в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении Уфимском федеральном исследовательском центре Российской академии наук.

В программе описываются порядок проведения вступительного испытания, критерии оценивания, приведен список вопросов программы.

## **Порядок проведения вступительных испытаний**

Вступительное испытание проводится в форме экзамена на основе билетов. В каждом экзаменационном билете по 2 вопроса. Экзамен проходит в письменной форме. Подготовка к ответу составляет 1 академический час (60 минут) без перерыва с момента раздачи билетов. Задания оцениваются от 0 до 100 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.

## **Критерии оценивания**

Оценка поступающему выставляется в соответствии со следующими критериями.

### **Отлично (80-100 баллов)**

Поступающий в аспирантуру уверенно владеет материалом, приводит точные формулировки теорем и других утверждений, сопровождает их строгими и полными доказательствами, уверенно отвечает на дополнительные вопросы программы вступительного испытания.

### **Хорошо (60-79 баллов)**

Поступающий в аспирантуру владеет материалом, приводит точные формулировки теорем и других утверждений, сопровождает их доказательствами, в которых допускает отдельные неточности. Отвечает на большинство дополнительных вопросов по программе вступительного испытания.

### **Удовлетворительно (20-59 баллов)**

Поступающий в аспирантуру знаком с основным материалом программы, приводит формулировки теорем и других утверждений, но допускает некоторые неточности, сопровождает их доказательствами, в которых допускает погрешности, или описывает основную схему доказательств без указания деталей. Отвечает на дополнительные вопросы по программе вступительного испытания, допуская отдельные неточности.

### **Неудовлетворительно (менее 20 баллов)**

Поступающий в аспирантуру не владеет основным материалом программы, не знаком с основными понятиями, не способен приводить формулировки теорем и других утверждений, не умеет доказывать теоремы и другие утверждения, не знает даже схемы доказательств. Не отвечает на большинство дополнительных вопросов по программе вступительного испытания.

## Список примерных экзаменационных вопросов

1. Предел числовой последовательности. Критерий Коши существования предела числовой последовательности. Свойства пределов числовых последовательностей.
2. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Критерий Коши сходимости числовых рядов. Признаки сходимости Даламбера, Коши и сравнения для положительных рядов, признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.
3. Предел функции одной переменной в точке. Непрерывность функции одной переменной в точке. Непрерывность функции одной переменной на отрезке и на интервале. Теоремы о непрерывных на отрезке функциях: теоремы Больцано - Коши, Вейерштрасса, Кантора.
4. Дифференцируемость функции в точке. Функции, дифференцируемые на интервале и их свойства: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.
5. Непрерывность и дифференцируемость функции многих переменных в точке, в области. Частные производные. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью частных производных.
6. Производные функции по направлению, градиент. Необходимые и достаточные условия экстремума функции одной и многих переменных.
7. Формула Тейлора для функций одной и многих переменных.
8. Неявные функции, теорема о неявной функции. Производные неявной функции.
9. Определенный интеграл Римана, суммы Дарбу, критерии интегрируемости. Простейшие свойства интеграла Римана. Формула Ньютона - Лейбница.
10. Интегрирование в многомерных пространствах. Криволинейные и поверхностные интегралы. Формулы Грина, Стокса.
11. Дифференцируемость функции комплексного переменного в точке. Аналитические функции. Условие Коши - Римана. Элементарные функции комплексного переменного и их производные. Интеграл по кривой от аналитической функции, теорема Коши, интегральная формула Коши, разложение в степенной ряд аналитических функций. Степенные ряды элементарных функций комплексного переменного.
12. Ряды Лорана, классификация изолированных особых точек. Вычеты и основная теорема о вычетах. Применение вычетов для вычисления несобственных интегралов.
13. Теорема Руше. Доказательство основной теоремы алгебры.
14. Метрические пространства. Компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах. Критерии Хаусдорфа и Гейне-Бореля компактности множества.
15. Принцип сжатых отображений и его связь с итеративными методами решения уравнений.
16. Линейные нормированные пространства. Линейные функционалы и операторы в ЛНП. Норма линейного непрерывного оператора и теорема

Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала с сохранением нормы.

17. Гильбертово пространство. Теорема о проекциях и общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

18. Ряды Фурье в функциональных гильбертовых пространствах. Сходимость в среднем. Условия сходимости в точке и равномерная сходимость.

19. Задача Коши для дифференциального уравнения первого порядка, системы дифференциальных уравнений и дифференциального уравнения  $n$ -го порядка. Теоремы существования и единственности решения задачи Коши.

20. Линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка. Фундаментальная система решений однородного линейного уравнения. Общее решение однородного и неоднородного линейного уравнения  $n$ -го порядка. Метод вариации произвольных постоянных.

21. Линейные системы дифференциальных уравнений. Фундаментальная система решений и фундаментальная матрица решений однородной системы.

22. Автономные уравнения и системы. Свойства автономных систем. Траектории автономных систем. Точки равновесия (особые точки) и периодические решения (циклы) автономных систем. Фазовые пространства и фазовые портреты автономных систем.

23. Фазовые портреты линейных автономных систем второго порядка. Классификация особых точек на плоскости: узел, седло, фокус, центр. Фазовые портреты нелинейных автономных систем второго порядка в окрестности особой точки. Линеаризованное уравнение.

24. Устойчивость по Ляпунову решений дифференциальных уравнений. Асимптотическая устойчивость.

25. Признаки устойчивости нулевой точки равновесия линейных автономных систем. Устойчивость по первому приближению. Признаки устойчивости точек равновесия нелинейных автономных систем.

26. Классификации уравнений с частными производными второго порядка с постоянными коэффициентами и с двумя независимыми переменными.

27. Уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными. Постановка основных задач, их физическая интерпретация. Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения колебаний неограниченной струны.

28. Задача о колебаниях струны с закрепленными концами. Построение ее решения методом Фурье.

29. Уравнение теплопроводности. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Вывод формулы Пуассона.

30. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Методы решения СЛАУ.

31. Конечномерные линейные пространства. Размерность линейного пространства. Базис в линейном пространстве. Евклидово пространство. Скалярное произведение и норма в евклидовом пространстве.

32. Линейные операторы в конечномерных линейных пространствах и их матрицы. Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах. Собственные вектора и собственные числа линейных операторов. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.

33. Вероятность и ее свойства. Примеры вероятностных пространств. Условная вероятность, независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

34. Случайные величины. Функция распределения случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Биномиальное, пуассоновское, равномерное и нормальное распределения случайных величин.

35. Выпуклые множества и экстремальные свойства выпуклых функций.

36. Задача выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера.

37. Постановка задач вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

### *Литература для подготовки*

1. Л.Д. Кудрявцев: Курс математического анализа. В 3-х томах, - М.: Юрайт, 2019.

2. Л.Д. Кудрявцев и др.: Сборник задач по математическому анализу. В 3-х томах, - М.: Физматлит, 2018.

3. Г.М. Фихтенгольц: Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах, - М.: Лань, 2022.

4. Б.П. Демидович: Сборник задач и упражнений по математическому анализу, - М.: Лань, 2022.

5. А.Г. Курош: Курс высшей алгебры, - М.: Лань, 2022.

6. А.И. Кострикин: Введение в алгебру, в 3 частях, - М.: Изд-во МЦНМО, 2022.

7. А.И. Кострикин и др.: Сборник задач по алгебре, - М.: Изд-во МЦНМО, 2009.

8. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк: Аналитическая геометрия, - М.: Физматлит, 2019 г.

9. Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров: Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре, - М.: Физматлит, 2008.

10. И.М. Гельфанд: Лекции по линейной алгебре, - М.: Физматлит, 2009.

11. Э.Г. Позняк, Е.В. Шикин: Дифференциальная геометрия, - М.: Эдиториал УРСС, 2003.

12. Р.С. Юлмухаметов, В.И. Луценко, Н.Ф. Абузярова, И.С. Галимов: Теория множеств, - Уфа: РИЦ БашГУ, 2012.

13. Р.С. Юлмухаметов, К.П. Исаев, К.В. Трунов, А.А. Путинцева: Теория алгоритмов, - Уфа: РИЦ БашГУ, 2012.

14. Р.С. Юлмухаметов, Н.Ф. Абузярова, К.В. Трунов, А.А. Путинцева: Математическая логика, - Уфа: РИЦ БашГУ, 2012.

15. В.И. Арнольд: Обыкновенные дифференциальные уравнения, - М.: Изд-во МЦНМО, 2018.

16. А.Ф. Филиппов: Введение в теорию дифференциальных уравнений, -

М.: УРСС, 2022.

17. А.Ф.Филиппов: Сборник задач по дифференциальным уравнениям, - М.: УРСС, 2022.

18. М.Г. Юмагулов: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теория и приложения, - М., Ижевск: Изд-во РХД, 2008.

19. А.Н. Колмогоров, С.В.Фомин: Элементы теории функций и функционального анализа, -М.: УРСС, 2023.

20. Г.И. Просветов: Функциональный анализ. Задачи и решения, - М.:АльфаПресс, 2010.

21. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат: Методы теории функций комплексного переменного, - СПб.: Лань, 2002.

22. А.И. Маркушевич: Теория аналитических функций. В 2-х томах, - СПб.: Лань, 2009.

23. Б.В. Шабат: Введение в комплексный анализ. В 2 частях, - СПб.:Лань, 2004.

24. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский: Уравнения математической физики, - М.: Издво МГУ, 2009.

25. В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, А.А. Вашарин, Х.Х. Каримова, Ю.В. Сидоров, М.Н. Шабунин: Сборник задач по уравнениям математической физики, - М.: Физматлит, 2003.

26. В.С. Владимиров, В.В. Жаринов: Уравнения математической физики,- М.: Литрес, 2016.

27. Б.В. Гнеденко: Курс теории вероятностей, -М.: УРСС, 2022.

28. В.Е. Гмурман: Теория вероятностей и математическая статистика, - М.: УРСС, 2023.

29. А.М. Зубков, Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков: Сборник задач по теории вероятностей, -М.: УРСС, 2022.

30. В.Е. Гмурман: Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, -М.: УРСС, 2023.

31. Э.М. Галеев: Оптимизация. Теория, примеры, задачи, - М.: Либроком, 2010.

32. А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров: Курс методов оптимизации, - М.: Физматлит, 2005.

33. В.Г. Карманов: Математическое программирование, - М.: Физматлит, 2011.

34. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков: Численные методы, - М.: УРСС, 2023.

35. Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Б.В. Чижонков: Численные методы в задачах и упражнениях, - М.: УРСС, 2017.

Программа вступительных испытаний в аспирантуру составлена в соответствии с федеральными государственными требованиями и паспортом научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и

математическая физика.

Программу вступительных испытаний по специальной дисциплине научной специальности 1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика разработал(и):

Д-р физ.-мат. наук, Борисов Денис Иванович