



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное научное учреждение

Уфимский федеральный исследовательский центр Российской академии наук

Институт математики с вычислительным центром – обособленное структурное подразделение Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук

УТВЕРЖДАЮ



И.о. заместителя руководителя УФИЦ
РАН по научно-организационной работе

И.Ф. Шаяхметов

2023 г.

ПРОГРАММА

вступительных испытаний по специальной дисциплине при приеме на обучение по программам аспирантуры – программам подготовки научных кадров в аспирантуре по научной специальности

1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Программа вступительных испытаний
одобрена на заседании Ученого совета ИМВЦ
от «23» марта 2023 г. Протокол № 3

Уфа 2023

Общие указания

Программа вступительного экзамена в аспирантуру по специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ предназначена для лиц, желающих проходить обучение в Федеральном государственном бюджетном научном учреждении Уфимском федеральном исследовательском центре Российской академии наук.

В программе описываются порядок проведения вступительного испытания, критерии оценивания, приведен список вопросов программы.

Порядок проведения вступительных испытаний

Вступительное испытание проводится в форме экзамена на основе билетов. В каждом экзаменационном билете по 2 вопроса. Экзамен проходит в письменной форме. Подготовка к ответу составляет 1 академический час (60 минут) без перерыва с момента раздачи билетов. Задания оцениваются от 0 до 100 баллов в зависимости от полноты и правильности ответов.

Критерии оценивания

Оценка поступающему выставляется в соответствии со следующими критериями.

Отлично (80-100 баллов)

Поступающий в аспирантуру уверенно владеет материалом, приводит точные формулировки теорем и других утверждений, сопровождает их строгими и полными доказательствами, уверенно отвечает на дополнительные вопросы программы вступительного испытания.

Хорошо (60-79 баллов)

Поступающий в аспирантуру владеет материалом, приводит точные формулировки теорем и других утверждений, сопровождает их доказательствами, в которых допускает отдельные неточности. Отвечает на большинство дополнительных вопросов по программе вступительного испытания.

Удовлетворительно (20-59 баллов)

Поступающий в аспирантуру знаком с основным материалом программы, приводит формулировки теорем и других утверждений, но допускает некоторые неточности, сопровождает их доказательствами, в которых допускает погрешности, или описывает основную схему доказательств без указания деталей. Отвечает на дополнительные вопросы по программе вступительного испытания, допуская отдельные неточности.

Неудовлетворительно (менее 20 баллов)

Поступающий в аспирантуру не владеет основным материалом программы, не знаком с основными понятиями, не способен приводить формулировки теорем и других утверждений, не умеет доказывать теоремы и другие утверждения, не знает даже схемы доказательств. Не отвечает на большинство дополнительных вопросов по программе вступительного испытания.

Список примерных экзаменационных вопросов

1. Предел числовой последовательности. Критерий Коши существования предела числовой последовательности. Свойства пределов числовых последовательностей. Верхний и нижний пределы последовательностей, критерий сходимости в терминах верхних и нижних пределов.

2. Числовые ряды. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Критерий Коши сходимости числовых рядов. Признаки сходимости Даламбера, Коши и сравнения для положительных рядов, признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.

3. Предел функции одной переменной в точке. Непрерывность функции одной переменной в точке. Непрерывность функции одной переменной на отрезке и на интервале. Теоремы о непрерывных на отрезке функциях: теоремы Больцано-Коши, Вейерштрасса, Кантора.

4. Дифференцируемость функции в точке. Функции, дифференцируемые на интервале и их свойства: теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.

5. Непрерывность и дифференцируемость функции многих переменных в точке и в области. Частные производные. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью частных производных.

6. Производные функции по направлению, градиент. Необходимые и достаточные условия экстремума функции одной и многих переменных.

7. Формула Тейлора для функций одной и многих переменных.

8. неявные функции, теорема о неявной функции. Производные неявной функции.

9. Определенный интеграл Римана, суммы Дарбу, критерии интегрируемости. Простейшие свойства интеграла Римана. Формула Ньютона - Лейбница. Несобственные интегралы, критерий Коши сходимости несобственных интегралов. Признаки сходимости: признак сравнения, признаки Абеля и Дирихле. Интегрирование в многомерных пространствах. Криволинейные и поверхностные интегралы. Формулы Грина, Стокса.

10. Дифференцируемость функции комплексного переменного в точке. Аналитические функции. Условие Коши - Римана. Элементарные функции комплексного переменного и их производные. Интеграл по кривой от аналитической функции, теорема Коши, интегральная формула Коши, разложение в степенной ряд аналитических функций. Степенные ряды элементарных функций комплексного переменного.

11. Ряды Лорана, классификация изолированных особых точек. Вычеты и основная теорема о вычетах. Применение вычетов для вычисления несобственных интегралов.

12. Теорема Руше. Доказательство основной теоремы алгебры.

13. Метрические пространства. Компактные и предкомпактные множества в метрических пространствах. Критерии Хаусдорфа и Гейне - Бореля компактности множества.

14. Принцип сжатых отображений и его связь с итеративными методами решения уравнений.

15. Линейные нормированные пространства. Линейные функционалы и операторы в ЛНП. Норма линейного непрерывного оператора и теорема Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала с сохранением нормы.

16. Гильбертово пространство. Теорема о проекциях и общий вид линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.

17. Ряды Фурье в функциональных гильбертовых пространствах. Сходимость в среднем. Условия сходимости в точке и равномерная сходимость.

18. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ). Задача Коши для ОДУ. Теорема существования и единственности задачи Коши.

19. Общее решение линейного однородного уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Общее решение линейного неоднородного уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами.

20. Фазовый портрет системы линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

21. Классификации уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами и с двумя независимыми переменными.

22. Уравнения гиперболического типа с двумя независимыми переменными. Постановка основных задач, их физическая интерпретация. Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения колебаний неограниченной струны.

23. Задача о колебаниях струны с закрепленными концами. Построение ее решения методом Фурье.

24. Уравнение теплопроводности. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности. Вывод формулы Пуассона.

25. Матрица и действия с матрицами. Обратная матрица и методы ее вычисления.

26. Определитель матрицы, его свойства.

27. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Методы решения СЛАУ.

28. Ранг матрицы и методы вычисления ранга матрицы.

Фундаментальная система решений однородных СЛАУ. Общее решение однородной СЛАУ.

29. Многочлены. Корни многочленов. Алгоритм Евклида. Теорема Безу. Приводимые и неприводимые многочлены.

30. Уравнение прямой на плоскости и в пространстве. Различные виды уравнений плоскости в пространстве.

31. Кривые второго порядка. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду.

32. Определение пространственной кривой и ее длины. Кривизна и кручение кривой, формулы Френе.

33. Поверхность в пространстве. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Первая и вторая квадратичная форма. Кривизна поверхности.

34. Конечномерные линейные пространства. Размерность линейного пространства. Базис в линейном пространстве. Евклидово пространство. Скалярное произведение и норма в евклидовом пространстве.

35. Линейные операторы в конечномерных линейных пространствах и их матрицы. Связь между матрицами линейного оператора в различных базисах. Собственные вектора и собственные числа линейных операторов. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду.

36. Пересечение и сумма подпространств. Прямая сумма подпространств. Размерность суммы и пересечения подпространств.

37. Билинейные и квадратичные формы. Знакоопределенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

38. Вероятность и ее свойства. Примеры вероятностных пространств. Условная вероятность, независимость событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

39. Случайные величины. Функция распределения случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Биномиальное, пуассоновское, равномерное и нормальное распределения случайных величин.

40. Выпуклые множества и экстремальные свойства выпуклых функций.

41. Задача выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера.

42. Постановка задач вариационного исчисления. Уравнение Эйлера.

43. Разностные методы для уравнений параболического типа.

44. Квадратурные формулы интерполяционного типа. Теорема о степени точности.

45. Итерационные методы решения СЛАУ. Фундаментальная теорема Самарского о достаточных условиях сходимости и ее применения.

46. Бинарные отношения типа эквивалентности. Классы эквивалентности

и их свойства. Отношение типа эквивалентности как разбиение множества.
47. Полные системы булевых функций. Теорема Поста.

Литература для подготовки

1. Л.Д. Кудрявцев: Курс математического анализа. В 3-х томах, - М.: Юрайт, 2019.
2. Л.Д. Кудрявцев и др.: Сборник задач по математическому анализу. В 3-х томах, - М.: Физматлит, 2018.
3. Г.М. Фихтенгольц: Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х томах, - М.: Лань, 2022.
4. Б.П. Демидович: Сборник задач и упражнений по математическому анализу, - М.: Лань, 2022.
5. А.Г. Курош: Курс высшей алгебры, - М.: Лань, 2022.
6. А.И. Кострикин: Введение в алгебру, в 3 частях, - М.: Изд-во МЦНМО, 2022.
7. А.И. Кострикин и др.: Сборник задач по алгебре, - М.: Изд-во МЦНМО, 2009.
8. В.А. Ильин, Э.Г. Позняк: Аналитическая геометрия, - М.: Физматлит, 2019 г.
9. Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров: Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре, - М.: Физматлит, 2008.
10. И.М. Гельфанд: Лекции по линейной алгебре, - М.: Физматлит, 2009.
11. Э.Г. Позняк, Е.В. Шикин: Дифференциальная геометрия, - М.: Эдиториал УРСС, 2003.
12. Р.С. Юлмухаметов, В.И. Луценко, Н.Ф. Абузярова, И.С. Галимов: Теория множеств, - Уфа: РИЦ БашГУ, 2012.
13. Р.С. Юлмухаметов, К.П. Исаев, К.В. Трунов, А.А. Путинцева: Теория алгоритмов, - Уфа: РИЦ БашГУ, 2012.
14. Р.С. Юлмухаметов, Н.Ф. Абузярова, К.В. Трунов, А.А. Путинцева: Математическая логика, - Уфа: РИЦ БашГУ, 2012.
15. В.И. Арнольд: Обыкновенные дифференциальные уравнения, - М.: Изд-во МЦНМО, 2018.
16. А.Ф. Филиппов: Введение в теорию дифференциальных уравнений, - М.: УРСС, 2022.
17. А.Ф. Филиппов: Сборник задач по дифференциальным уравнениям, - М.: УРСС, 2022.
18. М.Г. Юмагулов: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Теория и приложения, - М., Ижевск: Изд-во РХД, 2008.
19. А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин: Элементы теории функций и функционального анализа, - М.: УРСС, 2023.
20. Г.И. Просветов: Функциональный анализ. Задачи и решения, - М.: АльфаПресс, 2010.
21. М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат: Методы теории функций комплексного

переменного, - СПб.: Лань, 2002.

22. А.И. Маркушевич: Теория аналитических функций. В 2-х томах, - СПб.: Лань, 2009.

23. Б.В. Шабат: Введение в комплексный анализ. В 2 частях, - СПб.:Лань, 2004.

24. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский: Уравнения математической физики, - М.: Издво МГУ, 2009.

25. В.С. Владимиров, В.П. Михайлов, А.А. Вашарин, Х.Х. Каримова, Ю.В. Сидоров, М.Н. Шабунин: Сборник задач по уравнениям математической физики, - М.: Физматлит, 2003.

26. В.С. Владимиров, В.В. Жаринов: Уравнения математической физики,- М.: Литрес, 2016.

27. Б.В. Гнеденко: Курс теории вероятностей, -М.: УРСС, 2022.

28. В.Е. Гмурман: Теория вероятностей и математическая статистика, - М.: УРСС, 2023.

29. А.М. Зубков, Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков: Сборник задач по теории вероятностей, -М.: УРСС, 2022.

30. В.Е. Гмурман: Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике, -М.: УРСС, 2023.

31. Э.М. Галеев: Оптимизация. Теория, примеры, задачи, - М.: Либроком, 2010.

32. А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров: Курс методов оптимизации, - М.: Физматлит, 2005.

33. В.Г. Карманов: Математическое программирование, - М.: Физматлит, 2011.

34. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков: Численные методы, - М.: УРСС, 2023.

35. Н.С. Бахвалов, А.В. Лапин, Б.В. Чижонков: Численные методы в задачах и упражнениях, - М.: УРСС, 2017.

Программа вступительных испытаний в аспирантуру составлена в соответствии с федеральными государственными требованиями и паспортом научной специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ.

Программу вступительных испытаний по специальной дисциплине научной специальности 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ разработал(и):

Д-р физ.-мат.наук, Хабибуллин Булат Нурмиевич

Д-р физ.-мат.наук, Юлмухаметов Ринад Салаватович